Tratamiento del modelo de Richards

José Trinidad Ulloa Ibarra[1], Fernando Grijalva Díaz[1], Jaime Arrieta Vera[2], María Inés Ortega Arcega[1]

[1] Universidad Autónoma de Nayarit
[2] Universidad Autónoma de Guerrero

Recibido: 08 de agosto de 2017
Aceptado: 14 de octubre de 2017

Resumen.
La representación del crecimiento requiere de la utilización de diferentes modelos, algunos de ellos lineales y otros que no lo son, como el caso de los modelos sigmoidales que permiten una buena representación de los procesos de crecimiento animal. La elaboración de los mismos requiere del dominio matemático del profesionista a cargo, sin embargo; como ya se ha citado en otros escritos, no todos las personas a cargo poseen un manejo adecuado de la resolución de sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, por ello se hace necesario el contar con alternativas para el desarrollo de los modelos.
En el caso de los estudiantes de las licenciaturas propias del área, el problema se acrecienta debido a que en el currículo escolar no existen cursos de matemáticas que cubran esta necesidad.

Por ello y continuando con trabajos iniciados por Arrieta y Ulloa, se elabora la propuesta para el manejo del modelo de Richards a través de la utilización de un software de uso libre y de fácil manejo, como lo es el GeoGebra.

Palabras clave: Modelos, Richards, sigmoidal, pesca

Abstract
The representation of growth requires the use of different models, some of them linear and others that are not, as in the case of sigmoidal models that allow a good representation of animal growth processes. The preparation of the same requires the mathematical domain of the professional in charge, however; As has already been mentioned in other writings, not all the people in charge have an adequate management of the resolution of systems of equations, differential equations of first and second order, therefore it is necessary to have alternatives for the development of models. In the case of students from the area's own bachelor's degrees, the problem increases due to the fact that in the school curriculum there are no mathematics courses that cover this need.

For this reason and continuing with works initiated by Arrieta and Ulloa, the proposal for the management of the Richards model is elaborated through the use of a free and easy to use software, such as the GeoGebra.

Key words: Models, Richards, sigmoidal, fishing

Introducción.
Con este trabajo continuamos la línea de investigación que pretende explicar la relación entre las prácticas sociales y la construcción del conocimiento (Arrieta, 2003), abordando la línea que sostiene que los conocimientos emergen de las prácticas de las comunidades (en nuestro caso, la comunidad de biólogos e ingenieros pesqueros). Ulloa y Arrieta, 2008, dan cuenta de la modelación en el aula y

marcan la separación de los conocimientos entre la modelación escolar y las prácticas de las comunidades y en consecuencia de las intencionalidades.

El objetivo es mostrar las propuestas desarrolladas y las experiencias alcanzadas en el área biológico agropecuaria pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit a partir del establecimiento de la unidad de aprendizaje de modelación, en donde se resalta la falta de antecedentes matemáticos de los estudiantes que cursan las licenciaturas del área (Ulloa, Rodríguez y Arrieta, 2017).

Un objetivo importante que se pretende con la modelación matemática es contribuir a la comprensión de fenómenos reales, sin embargo, al empezar a modelar, es necesario aprender a elegir y delimitar de manera conveniente el problema de estudio, pues recordemos que los fenómenos reales relevantes son tan complejos que su estudio ha requerido distintas aproximaciones metodológicas (Creswell, 2003) y ha dado origen a las diferentes ciencias que han evolucionado durante siglos hasta alcanzar su expresión actual.

Si bien (como Darwin lo reconoció y nosotros lo sabemos) ninguna población puede crecer de manera exponencial durante mucho tiempo (o de manera indefinida) debido a que hay límites al crecimiento. La caracterización del crecimiento en los peces se ha realizado a través de medidas de peso y longitud (Csirke, 1980 y Hopkins, 1992) y de la relación peso - longitud, mediante el coeficiente de alometría (Ricker, 1975), para lo cual se han utilizado modelos no lineales (Hopkins, 1992)

Dentro de los modelos no lineales destacan los denominados "Sigmoidales" entre los que se encuentran los siguientes: Brody (Brody, 1945), Von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957), Richards (Richards, 1959), Logística (Verhulst, 1838, 1961) y Gompertz (Gompertz 1825).

Estos modelos presentan la siguiente forma:

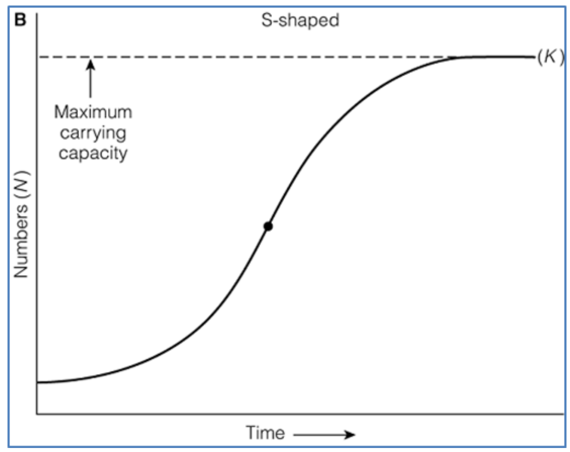

Figura 1. Modelos Sigmoidales

Apareciendo en un gráfico con la población representada en el eje vertical y el tiempo representado en el horizontal, la curva sigmoidea muestra la tasa de crecimiento de la población aumentando lentamente al principio, luego acelerando y luego disminuyendo y finalmente estabilizándose a medida que la población se aproxima a la capacidad de carga del medio ambiente. La capacidad de carga es el tamaño de la población máxima que un entorno particular puede soportar.

Entendemos por crecimiento sigmoidal aquél que en su evolución pasa por dos fases diferenciadas: una primera fase en la que experimenta un crecimiento de tipo exponencial, más o menos lento, seguido de otra fase en la que se observa un crecimiento amortiguado, de tipo asintótico, de tal forma que, en conjunto, describe una curva en forma de S alargada

El objeto de Estudio.

El modelo de crecimiento de Richards

La modelo de crecimiento propuesto por Richards, contiene cuatro parámetros y está representado por la siguiente función:

$$y(t) = A(1 + Be^{-Kt})^{\frac{1}{1-M}}$$

donde:

y(t) es el crecimiento del organismo al tiempo t,

A es el crecimiento máximo asintótico esto es cuando t tiende al infinito,

K es el parámetro de curvatura que expresa que tan rápido alcanza el crecimiento máximo,

B un parámetro de ajuste que depende de la condición inicial en t = 0,

M parámetro de alometría. donde el signo positivo se emplea cuando M > 0 y el negativo cuando 0 < M < 1.

La curva que representa el modelo de Richards está representada en el siguiente gráfico:

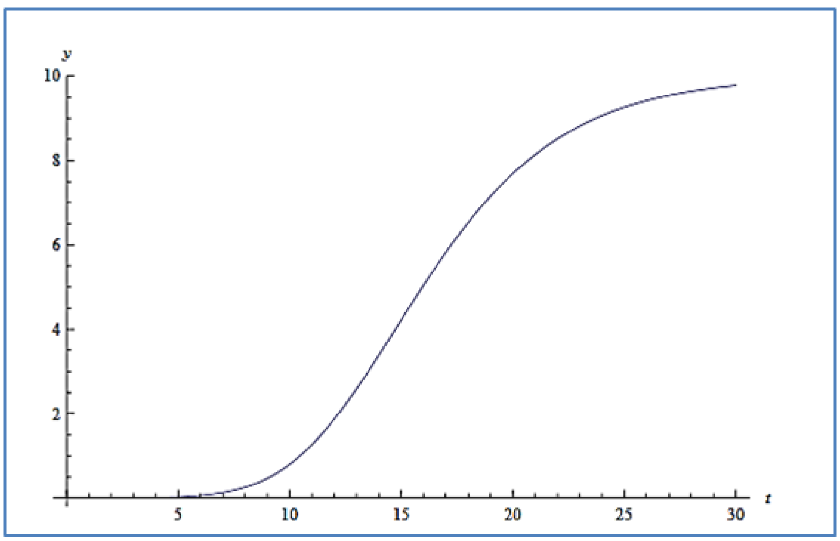

Figura 2. Curva de Richards con A = 10, B = 8, K = 0.25, M = 1.2

El Problema

El modelo de Richards, ha sido considerado como un modelo flexible comparado con algunos modelos de tres parámetros, gracias a que posee un parámetro de forma que le permite modelar las curvas con mayor precisión. Sin embargo, ha sido también criticado, ya que dicho parámetro no tiene significado biológico y en ciertas ocasiones genera problemas para ajustar los datos experimentales (McMeekin y Rooss, 1996).

Para el análisis de algunos modelos sigmoidales se ha propuesto la utilización de diferente software (Ulloa, Arrieta y Benítez, 2015; Ulloa y Rodríguez, 2013; Ulloa, Ortega, Rodríguez y Benítez, 2015); ya que la linealización de este modelo resulta en un proceso demasiado difícil de trabajar. Para el desarrollo de este trabajo se optó por el uso de un graficador.

El uso de software ha demostrado ser una herramienta muy valiosa en la modelación, especialmente cuando las matemáticas requeridas para hacerlo son difíciles, complicadas o cuando quien va a elaborar el modelo carece de los conocimientos requeridos. Usar un software de graficación para el modelado permite modificar el mismo, ejecutar simulaciones y mostrar los resultados gráficamente. Esto permite la analogía entre la representación de un modelo con un mapa conceptual en el sentido de que es posible indicar cuáles variables son relevantes y las relaciones entre ellas.

Desarrollo

Con la finalidad de contar con una metodología apropiada y sencilla se propone la utilización de GeoGebra, con el método descrito por Ulloa, Arrieta y Benítez en 2015.

Sea el caso de encontrar el modelo de Richards para el crecimiento del marlín rayado: Los datos de crecimiento del marlín rayado (*Tetrapturus audax)* se muestran en la tabla siguiente:

años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
cm	100	120	148	160	175	185	188	192	196	198	200

De acuerdo con lo establecido en Ulloa, et al 2015, con el uso de software específicamente con GeoGebra es posible construir modelos matemáticos de una cierta situación y estudiarlos en forma global o analizar la influencia de los diferentes parámetros involucrados. De igual forma se pueden analizar dos o tres de sus representaciones, a saber, una representación pictórica (un dibujo geométrico), una representación gráfica (la gráfica de una función) y una representación algebraica (la ecuación de una función); es decir es posible visualizar tres de las representaciones posibles de los modelos.

Se introducen los datos al programa, ellos es posible hacerlo a través de la barra de entrada o bien utilizando la vista Hoja de Cálculo

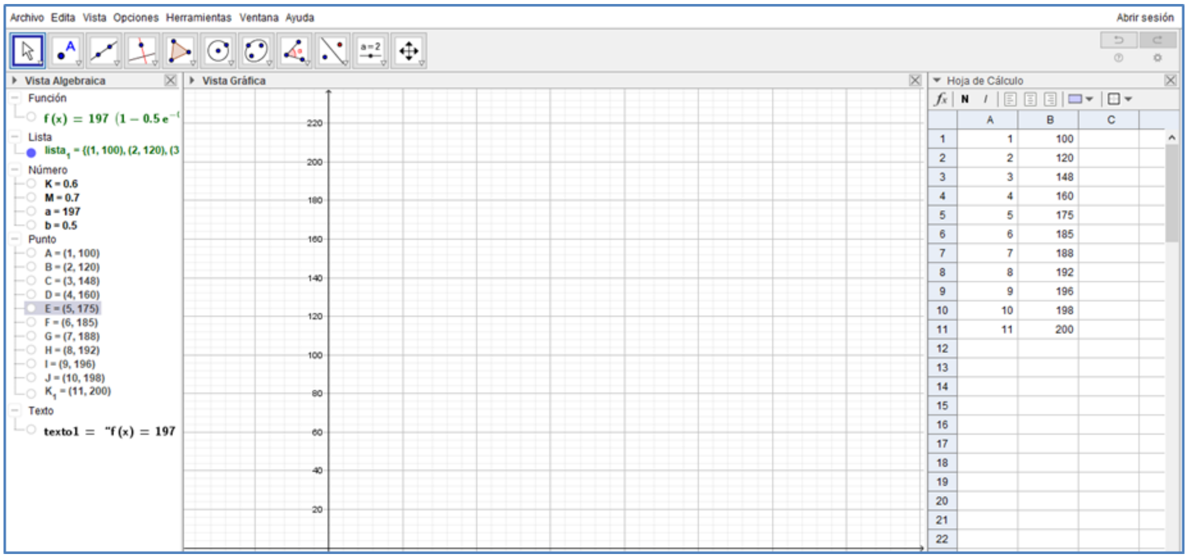

Figura No. 3. GeoGebra con tres de sus pantallas

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	1	100	
2	2	120	
3	3	148	
4	4	160	
5	5	175	
6	6	185	
7	7	188	
8	8	192	
9	9	196	
10	10	198	
11	11	200	
12			
13			
14			

Figura 4. La vista Hoja de Cálculo del GeoGebra

Se seleccionan los datos y se crea una lista de puntos

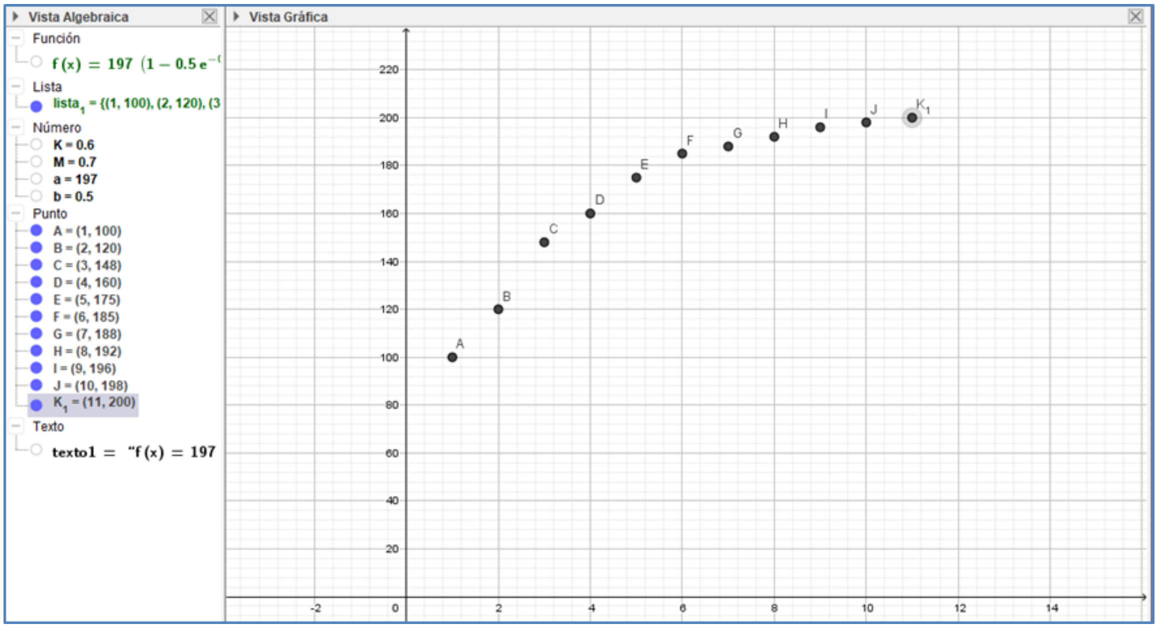

Figura 5. Puntos creados con base en la hoja de cálculo

Se definen los deslizadores que sean necesarios, esto es uno por cada uno de los parámetros del modelo.

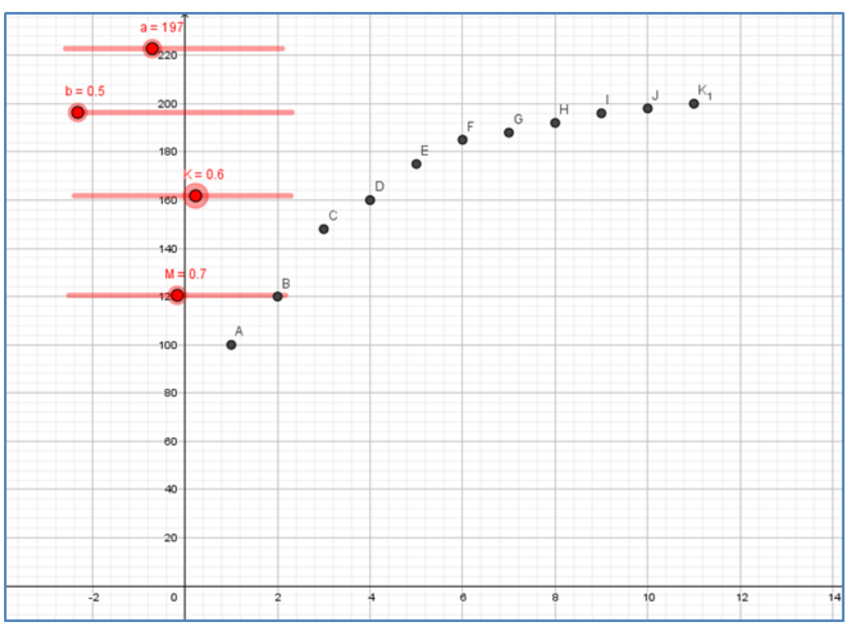

Figura 6. Deslizadores a, b, K, M

Se introduce la ecuación del modelo y se inicia el ajuste de la curva mediante los deslizadores.

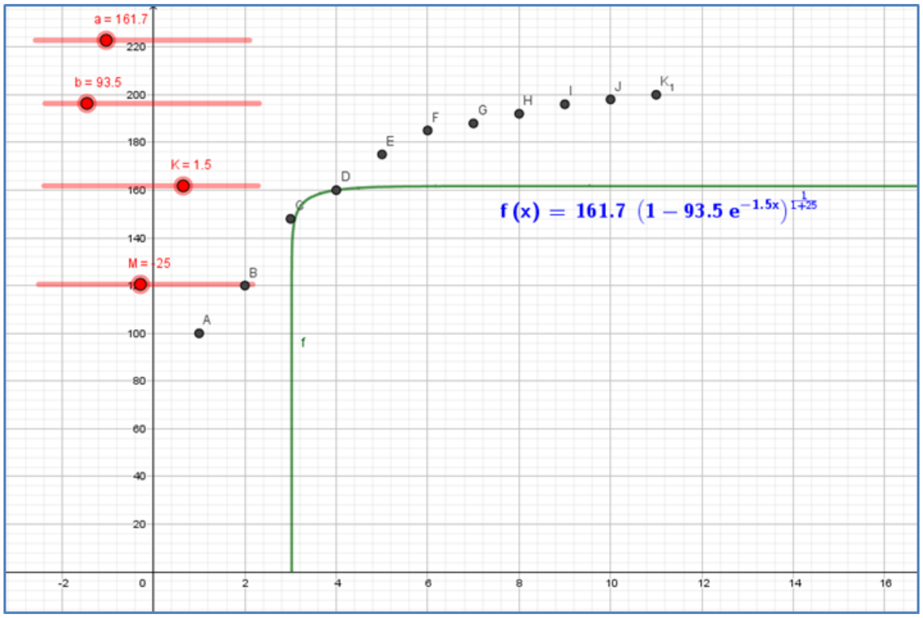

Figura 7. Ajuste inicial

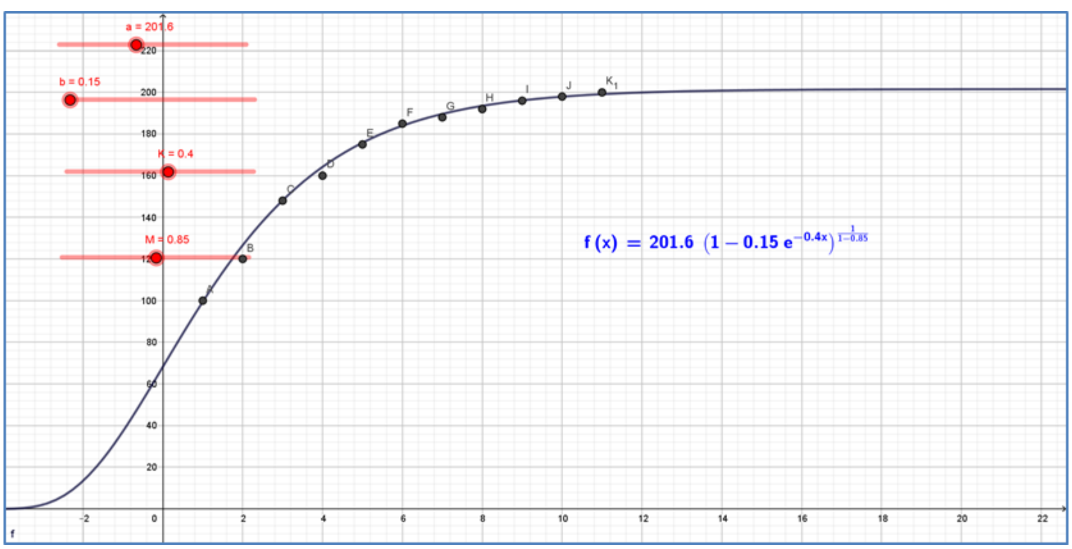

Figura 8. Ajuste final

Resultado

Como puede observarse el modelo se encuentra ajustado, por lo que su representación algebraica es:

$$f(x) = 201.6(1 - 0.15e^{-04x})^{\frac{1}{1-0.85}}$$

Conclusiones

Consideramos que el método propuesto puede ser de gran utilidad, ya que, el modelo de Richards se tiene a partir de la ecuación diferencial de primer grado de Bernoulli (tomado de Penney 2001) que define que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre $y(t)^M$ y $y(t)$, y la expresión es la siguiente

$$y'(t) = sy(t)^M - hy(t)$$

donde $y(t)$ es el tamaño del organismo al tiempo t. Para valores de $0 < M < 1$ implica que $s; h > 0$ y para valores de $M > 1$ implica $s; h < 0$ siendo constantes que están relacionadas con el crecimiento máximo.

Como puede inferirse resolver la ecuación anterior requiere un tratamiento adecuado de las ecuaciones diferenciales, de integración y de derivación.

Lo cual coincide con lo establecido en Ulloa, Rodríguez y Arrieta, 2017, para analizar el crecimiento en las ciencias biológicas es necesario recurrir a una serie de conceptos de la matemática, tales como asíntotas, puntos extremos, puntos de inflexión y obviamente a la resolución de ecuaciones diferenciales, lo que en el caso de las escuelas del área resulta imposible, por lo que se necesitan métodos alternativos para dar respuesta a las actividades de modelación.

Bibliografía

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Bertalanffy, L.V. 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. Quart. Rev. Biol. , 32: 217-230.

Brody, S. (1945). Bioenergetics and growth. Reinhhold Publication. New York. 1023 p

Creswell, J.W. (2003). Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. Editorial Sage, 2a Ed.

Csirke, J. (1980). Introducción a la dinámica de poblaciones de peces. FAO, Doc Téc Pesca, 192:82.

Edwards H.C.; Penney E.D. (2001). Ecuaciones diferenciales. (4th ed.) México: Prentice Hall.

Gompertz B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new model of determining life contingencies. Phil. Trans. R. Soc. 115, 513–585

Hopkins, K, (1992). Reporting fish growth: A review of the basics. World Aquaculture Soc; 23: 173-179.

Mcmeekin, T.; Ross, T. Modeling applications. J Food Protect. 59(Suppl): 37-42. 1996

Richards, F.J. (1959). A flexible growth functions for empirical use. J. Exp. Bot. , 10: 290 -300

Ricker, W. (1975). Computation and interpretation of biological statistics of fish population. Bull Fish Res Bd Can; 191:82.

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2008). Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 479 488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J.; Rodríguez, J. 2013. La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. Revista Electrónica de Veterinaria REDVET®. España. Disponible en http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n020213.html

Ulloa, J.; Ortega, M.; Rodríguez, G.; Benítez, A. (2015).Modelos matemáticos no lineales del crecimiento de la Carpa común (Cyprinus carpio Linnaeus, 1758). Acta Pesquera. Año 1. No. 2

Ulloa, J.; Arrieta, J. Benítez, A. (2015). Alternativas para la elaboración de modelos matemáticos. Acta Pesquera No 1, Vol. 1

Ulloa, J.; Rodríguez, J. y Arrieta, J. (2017). Los modelos sigmoidales y su impacto en la educación pesquera. Acta Pesquera No. 5, Año 3.

Verhulst, P. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Corresp. Math. Phys. 10 , 113–121.