Modelación Presa – Depredador basada en uso de tecnología

José Trinidad Ulloa Ibarra1, Juan Felipe Flores Robles[1], María Inés Ortega Arcega[1], Jaime Arrieta Vera[2]

[1] Universidad Autónoma de Nayarit
[2] Universidad Autónoma de Guerrero

Recibido: 02 de agosto de 2018
Aceptado: 05 de noviembre de 2018

Resumen.
El estudio de algunos fenómenos biológicos requiere de herramientas matemáticas de diversa complejidad. Para modelarlos y analizarlos se usan ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales y/o ecuaciones diferenciales estocásticas. Sin embargo, en muchas ocasiones quien desea analizar este tipo de fenómenos carece de la formación para poder trabajar con esa matemática, por lo que se requiere buscar alternativas para subsanar esa deficiencia, el avance tecnológico cuenta con diversas herramientas para ello, es nuestro caso recurriremos a la hoja de cálculo de Excel. Con lo anterior incidimos en la problemática de algunas licenciaturas que carecen de una formación sólida en matemáticas como los son las del área biológico-agropecuaria pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit, que es y ha sido nuestra área de estudio. Presentamos una versión del modelo de Lotka – Volterra también conocido como modelo presa – depredador cuya representación matemática es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax - Bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -Cy + Dxy \end{cases}$$

donde x e y representan el número de presas y predadores, respectivamente, con A, B, C, D constantes positivas que reflejan las condiciones de crecimiento de las especies y sus interacciones. El estudio de estos temas resulta ser de importancia en áreas como: el manejo de recursos renovables, la evolución de variedades resistentes a pesticidas, los fenómenos de sustitución tecnológica, el cambio organizativo o el aprendizaje organizativo

Palabras clave: Modelación, presa, depredador, dinámica poblacional, pesca

Abstract
The study of some biological phenomena requires mathematical tools of different complexity. To model and analyze them, we use ordinary differential equations, partial differential equations and / or stochastic differential equations. However, in many cases who wants to analyze this type of phenomena lacks the training to be able to work with that mathematics, so it is necessary to look for alternatives to correct this deficiency, the technological advance has various tools for this, in our case we will resort to the Excel spreadsheet. With the foregoing, we have an impact on the problems of some bachelor's degrees that lack a solid formation in mathematics, such as those in the biological-agricultural-fishing area of the Autonomous University of Nayarit, which is and has been our area of study. We present a version of the Lotka -

- Volterra model also known as prey - predator model whose mathematical representation is:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax - Bxy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -Cy + Dxy \end{cases}$$

where x and y represent the number of prey and predators, respectively, with A, B, C, D positive constants that reflect the growth conditions of the species and their interactions. The study of these issues turns out to be of importance in areas such as: the management of renewable resources, the evolution of varieties resistant to pesticides, the phenomena of technological substitution, organizational change or organizational learning

Key words: Modeling, prey, predator, population dynamics, fishing

Introducción.

Las matemáticas, que siempre han servido para explicar y comprender el mundo, están siendo aplicadas a infinidad de áreas y cada vez tienen un mayor peso en la economía. Los matemáticos, que tradicionalmente no solían tener mucho contacto con la realidad, forman parte de plantillas de empresas muy diversas.

La biología es, como todas las otras, una ciencia en constante evolución, con una multiplicidad de ramas por explorar que requieren de métodos, técnicas, enfoques particulares, a veces nuevos, a veces novedosos, a veces completamente tradicionales.

La Matemática Aplicada en las Ciencias Biológicas permite brindar criterios y herramientas básicas para entender, manejar e interpretar cada vez mejor la actividad, satisfacer las demandas de nuevas tecnologías para producir en mercados globales altamente competitivos resguardando los recursos naturales y tomar decisiones a mediano y largo plazo en condiciones similares de experimentación (Ortega, 2000).

La Biología Matemática, por ejemplo, permite estudiar la dinámica de poblaciones, pues hay modelos y ecuaciones diferenciales que explican cómo funcionan. El modelo más sencillo es tener dos especies en un ecosistema (una es depredadora y la otra, presa). Sirve para predecir cómo puede evolucionar y ofrece información para actuar sobre ese sistema y evitar, por ejemplo, que se produzca la extinción de una de ellas (Lombardero, 2014).

Los modelos matemáticos son recursos explicativos fundamentales en todas las áreas del conocimiento y particularmente en aquellas ciencias en las que es dudoso que podamos contar con leyes científicas genuinas, como es el caso de la biología (y de las ciencias sociales). Surgen entonces dos situaciones que debemos tener presentes: como llegar a obtener esos modelos partiendo de datos de observaciones y el cómo interpretarlos. Con respecto de cómo se interpretan los modelos ha despertado una gran atención en las últimas décadas y, sin embargo, sigue siendo una cuestión controvertida. Hay muchos tipos de modelos y no es de extrañar, por tanto, que puedan proporcionar explicaciones de los fenómenos de formas muy diversas. Si se puede señalar un rasgo común a todos estos modos diferentes de explicar, es el hecho de que los modelos nos ofrecen una mejor comprensión de los fenómenos. Se argumenta en este trabajo que la noción de ‘comprensión’ aquí implicada no es irremediablemente subjetiva (Diéguez, 2013). Con relación a como poder llegar a modelos confiables el profesionista debe contar con una serie de conocimientos no sólo con respecto al fenómeno que trata de modelar, sino también debe conocer matemáticas.

La aplicación de herramientas matemáticas en el estudio de fenómenos, procesos y conceptos biológicos es obviamente, una actividad de creciente importancia que se ha desarrollado fundamentalmente al amparo de colaboraciones multidisciplinarias entre científicos de diversas áreas biológicas y matemáticos interesados en aplicar sus métodos a problemas surgidos de la teoría, el laboratorio o el trabajo de campo biológicos.

Los primeros modelos matemáticos aplicados en Biología han sido quizá los modelos que intentan describir la dinámica de poblaciones, entre los que destacan el modelo de Fibonacci, el de Malthus, el de Verhults, llegando a los que intentan representar las interacciones entre poblaciones diferentes y para los que se requiere el uso de ecuaciones diferenciales, como lo es el modelo presa depredador (Lotka – Volterra), el trabajo tiene como objetivo presentar alternativas para representarlo sin utilizar ecuaciones diferenciales.

Es decir se muestra otra propuesta para el área biológico agropecuaria pesquera (ABAP) de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) ya que, al establecerse la unidad de aprendizaje de modelación matemática como parte de la Reforma Educativa de 2003, en donde los antecedentes con que cuentan los estudiantes se limitan a un curso de lenguaje y pensamiento matemático, se hace necesario establecer una correspondencia entre el lenguaje matemático y el biológico, así como abarcar un conjunto de aspectos que recorren un amplio espectro de las Matemáticas desde el Cálculo Diferencial hasta la Matemática Numérica y la Estadística Matemática, lo que permitió establecer vínculos con las diferentes disciplinas del área.

En la actualidad la aplicación de las matemáticas en las ciencias del mar ha experimentado un progreso considerable, y muchos de los fenómenos que ocurren en el océano se han podido entender mejor contando con su apoyo. Las matemáticas tienen relación directa con la investigación en la oceanografía física, auxiliándola en estudios de dinámica de las corrientes oceánicas, el comportamiento de las olas en sus índices de amplitud, las mareas, etcétera. Es por ello que el oceanógrafo físico tiene que dominar conocimientos en las siguientes áreas de las matemáticas: álgebra, análisis, cálculo diferencial e integral, análisis de vectores, métodos numéricos y programación de computadoras, (Cifuentes, Torres y Frías, 1995).

La comunidad de estudio en este trabajo, es la conformada por los profesionales de la pesca, en la que se consideran tanto a los biólogos pesqueros como a los ingenieros pesqueros; siendo éstos el punto de partida. Al observar los currículos de las carreras de ingeniería pesquera y las de los biólogos marinos, podemos darnos cuenta que la modelación se estudia en diferentes momentos (Ulloa, Arrieta, 2008) , sin embargo es claro que al igual que en otras comunidades hay una separación de los conocimientos del aula con las prácticas de las comunidades como profesionistas y, por ende, de las intencionalidades, de esta manera ha nacido el mito del conocimiento por el conocimiento, el conocimiento que vale por sí mismo.

Esto nos lleva a señalar que, la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio y por otra parte se ha dado poca importancia a la modelación como una asignatura de relevancia en la práctica profesional. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades (Ulloa, 2013)

Antecedentes

Para entender los procesos que ocurren en la historia de vida de los organismos es necesario determinar la abundancia de los individuos que constituyen una determinada población. El estudio de los eventos de nacimiento, crecimiento, reproducción y muerte de los elementos que la componen son fundamentales para comprender la dinámica demográfica de la misma (Begon, 1987).

Cada población tiene un nivel de organización y una estructura propia a medida que desarrollan sus fases de ciclo biológico el cual debe cumplirse y repetirse con cierta frecuencia en el espacio y en el tiempo para garantizar la continuidad de esta y su relación en la presencia de una especie en sí misma con respecto a las demás. Existe además otro aspecto, que está relacionado con la explotación pesquera, y que resulta de gran importancia para el estudio de estos organismos y para la pesca misma, la alimentación natural de las especies.

El crecimiento y decrecimiento de las poblaciones en la naturaleza y la lucha de las especies por sobrevivir han sido tema de inter ´es y estudio desde hace mucho tiempo. La mayor parte de los estudios sobre dinámica poblacional se centran en el desarrollo de herramientas que permitan predecir la evolución futura de los ecosistemas sometidos a ciertas condiciones, con el fi n de introducir técnicas de control en estos. En tal dinámica, las poblaciones interactúan de múltiples formas, teniendo en cuenta que la idea que se persigue es conservar su equilibrio –para lo cual se controlan las poblaciones alimento y las que se alimentan, y además se evita la extinción – y al mismo tiempo, mantener las especies en ciertos valores, tolerables por el ecosistema. En estas condiciones hay tres tipos básicos de interacción:

Si la tasa de crecimiento de una población decrece mientras la tasa de crecimiento de otra población crece, se habla de una situación presa - depredador.

Si las tasas de crecimiento de cada población decrecen, entonces se tiene competencia entre las especies.

Si las tasas de crecimiento de cada población aumentan, entonces se habla de mutualismo o simbiosis.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como ecuaciones presa - depredador, son un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales, y se usan para modelar sistemas biológicos donde interactúan dos especies: una presa y un depredador.

Teóricamente, el depredador puede destruir toda la presa, de modo que esta última llegue a extinguirse. Sin embargo, si esto ocurre esta también se extinguirá, puesto que depende de la presa para su existencia. De esta forma se desarrolla un ciclo en el cual la presa puede ser abundante y los depredadores pocos, y luego, debido a la abundancia de presa, la población de depredadores aumenta, disminuyendo la primera, y el ciclo continúa.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales las herramientas numéricas han jugado un papel importante debido a que la mayor parte de las ecuaciones que aparecen en los problemas no se pueden resolver exactamente y, por tanto, hay que recurrir a algún tipo de aproximación de la solución. Sin embargo, durante el siglo XIX y buena parte del XX no se usaron muchos de los métodos que se desarrollaron teóricamente ya que no existían máquinas en los que se pudieran computar. Este hecho cambio´ a mediados del siglo XX con la aparición de ordenadores que ya poseían una cierta capacidad de cálculo y de almacenamiento de datos.

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que representa al molde de Lotka

Volterra, hay dos enfoques principales: analítico y numérico. Los métodos analíticos como ya se mencionó son complicados y requieren buenas habilidades matemáticas. Además, muchas ecuaciones diferenciales no tienen ninguna solución analítica. Los métodos numéricos son fáciles y más universales (sin embargo, hay problemas con la convergencia).
Por ello este trabajo se centró en la utilización de métodos numéricos Excel.

Justificación

Interpretar fenómenos biológicos, tales como situaciones en la naturaleza donde una especie animal se alimenta de otra, y esta a su vez se alimenta de otras, genera una dinámica poblacional que es posible interpretar a través de medios matemáticos, como la modelación, Sin embargo, en el caso de este tipo de modelos que requieren de ecuaciones diferenciales en el área de estudio de la UAN representa un grave problema para el que deben buscarse alternativas que permitan la interpretación del fenómeno. El único antecedente es el curso de Lenguaje y Pensamiento Matemático cuya unidad cuatro es la introducción a la modelación matemática.

Por lo anterior se ha recurrido a la búsqueda de soluciones que permitan cursar modelación matemática sin hacer uso de las ecuaciones diferenciales, destacando entre éstas la utilización de software: Ulloa, Benítez y Rodríguez, 2008; Ulloa, Arrieta y Benítez, 2015; Ulloa, Ortega, Rodríguez y Benítez, 2015; Ulloa y Rodríguez, 2013.

Por lo que, se presenta una situación de aprendizaje que sirve de ayuda en el estudio, analítico y gráfico, del modelo presa - depredador con el uso de una metodología que involucra el empleo de la tecnología y que muestra una alternativa para modelar. Para ello, hemos dividido el trabajo de la forma siguiente:
En primera instancia, se expone al modelo presa - depredador como concepto y se desarrolla un análisis gráfico de los parámetros que intervienen en él. Posteriormente, se fundamenta el papel que juega el contexto social para la creación de situaciones de aprendizaje y la forma en que éstas, aunado al empleo de la tecnología, dando origen a una nueva forma de modelar que promueve la interacción entre los tres marcos representacionales (verbal, numérico/tabular y gráfico). Estableciendo así a la modelación como vínculo para acortar la separación existente entre los contenidos aprendidos en el aula escolar y su aplicación en la práctica profesional.

Objetivo General

Diseñar una situación de aprendizaje con apoyo en la hoja de cálculo de Excel que permita analizar tres marcos de representación de un fenómeno biológico. Se trata pues de:
1. Analizar la evolución temporal de poblaciones en situaciones de competencia y depredación.
2. Conocer el significado y la influencia de las distintas constantes que participan en los modelos.
3.Interpretar adecuadamente el espacio de fase

Metodología

El sistema predador-presa es una consecuencia de la Ley del Balance, que se puede resumir en la siguiente expresión:

Velocidad Neta Cambio Población = Velocidad Incremento - Velocidad Decremento
= nacimientos - muertes + migración

En general, en los sistemas predador - presa, la población oscila en el tiempo; es decir, las hipótesis de modelación implican:
a. Los valores iniciales de ambas poblaciones que oscilan en el tiempo.
b. El número medio de presas por debajo de un cierto valor admisible.

c. Estabilidad global del sistema ante un aumento brusco de la plaga (presa).
d. Las ecuaciones LV se plantean suponiendo que la velocidad de variación de las poblaciones es conjuntamente proporcional a los ritmos intrínsecos de variación de predadores - presas y la cantidad de población:

$$\frac{dx}{dt} = R_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = R_2 x$$

Siendo
$R_1 = A - By$
$R_2 = -C + Dy$

R_1 y R_2 son los ritmos de predadores y presas, respectivamente, y reflejan el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones en función de sus signos, si son constantes. Elecciones diferentes para estos ritmos determinan diferentes tipos de modelos. A su vez, x e y representan el número de presas y predadores, respectivamente. A, B, C y D son constantes positivas. Los cuatro términos tienen el siguiente significado:

A y C reflejan las condiciones de crecimiento de las especies y B y D su s interacciones. En ausencia de predadores (y = 0) la velocidad de variación del número de presas aumenta con el tiempo, de forma proporcional al número de presas. El crecimiento es exponencial y A es su ritmo o tasa de crecimiento (tasa de reproducción).

En ausencia de presas (x = 0) la velocidad de variación de predadores disminuye exponencialmente, y de forma proporcional (con ritmo C) al número de predadores presentes.

Suponiendo la existencia de presas suficientes para poder crecer, o al menos mantener la población actual, en presencia de predadores, el número de presas disminuye como consecuencia de los posibles encuentros entre presa-predador y este efecto se supone proporcional al producto de ambas poblaciones (-Bxy), mientras que la población de predadores aumenta como consecuencia de estos encuentros en una forma similar (Dxy).

El más simple y menos preciso es el método de Euler. Considere una ecuación diferencial estacionaria:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Primero necesitamos condiciones iniciales. Asumiremos que en el momento en que el valor de la función es x (t_o).

Ahora podemos estimar los valores de x en un momento posterior (o anterior) utilizando la ecuación:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t * f(x(t_0))$$

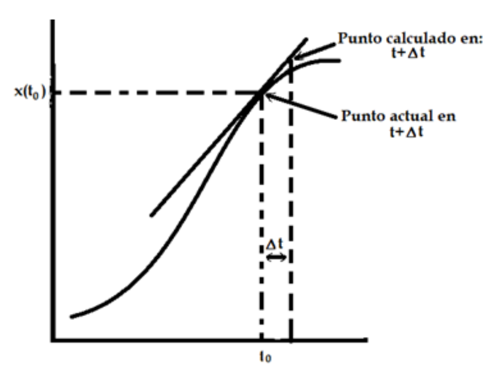

Fig. 1 En este gráfico estimamos la pendiente f (x) de la función en el punto t = t_0 y extrapolar está pendiente a través de toda el intervalo de tiempo.

La principal fuente de error en el método de Euler es la estimación de una derivada al inicio del intervalo de tiempo. La dirección de la solución real puede cambiar drásticamente durante este intervalo de tiempo y el punto predicho numéricamente podría estar lejos de la solución real (observe la figura).

El método de Euler se puede mejorar si la derivada (pendiente) se estima en el centro del intervalo de tiempo Dt. Sin embargo, la derivada en el centro depende del valor de la función en el centro que se desconoce. Por lo tanto, primero debemos estimar el valor de la función en el punto medio utilizando el método simple de Euler, y luego podemos estimar la derivada en el punto medio.

$$k = x(t_0) + 0.5 * \Delta t * f(x(t_0))$$

k es el valor de la función en el centro del intervalo de tiempo Dt. Finalmente, podemos estimar el valor de la función al final del intervalo de tiempo:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t * f(k)$$

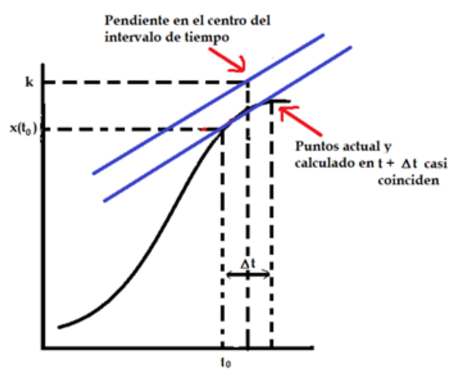

Figura 2. Método de Runge—Kuta de Segundo Orden

El más popular es el Método de Runge-Kutta de cuarto orden. Sin embargo, para nuestro propósitos es suficiente para usar el Método de segundo orden (Barreras, 2005).

Este método se aplica a las ecuaciones de Lotka -Volterra en una hoja de cálculo de Excel. Primero, calculamos las densidades de presas y depredadores (H 'y P', respectivamente) en el centro del intervalo de tiempo:

$$\begin{cases} H' = H + 0.5 * \Delta t * (rH - aHP) \\ P' = P + 0.5 * \Delta t * (bHP - MP) \end{cases}$$

El segundo paso es calcular las densidades de presas y depredadores (H "y P" al final del tiempo, paso l Dt

$$\begin{cases} H'' = H + 0.5 * \Delta t * (rH' - aH'P') \\ P'' = P + 0.5 * \Delta t * (bH'P' - MP') \end{cases}$$

El método de Runge-Kutta es muy útil para obtener una solución numérica de un tipo concreto de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden expresarse como:

$$y'(x) = f(x, y)$$

De forma general, se pueden resolver por este método todos los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que puedan expresarse mediante la forma canónica siguiente:

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_m)$$

$$y_m'(x) = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

El método de Runge-Kutta se puede por este motivo generalizar para un número □ de variables que dependan de una variable fundamental □ y cuyas derivadas primeras estén relacionadas con la variable principal y el resto de las variables, pero no con las derivadas de éstas.

Se puede observar que cuando m = 1 estamos en el caso de dos variables exclusivamente. Este tipo de métodos se basan en aproximaciones a través de las propiedades del polinomio de Taylor, y considerando un espacio discreto dividido en un número de intervalos finito de una longitud determinada denominada, generalmente, paso y representada por *h*.

Al convertir toda función en un espacio discreto con un número finito de intervalos, se denominan nodos a cada uno de los puntos entre cada intervalo. Haciendo una aproximación lineal entre cada nodo y el siguiente, la forma de calcular la solución es secuencial de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + h * \varphi(x_n, y_n)}$$

Es así para el caso de dos variables y para el caso general tendría la forma canónica:

$$\boldsymbol{(y_1)_{n+1} = (y_1)_n + h * \varphi_1(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n, \ldots, (y_m)_n}$$

$$\boldsymbol{(y_2)_{n+1} = (y_2)_n + h * \varphi_2(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n, \ldots, (y_m)_n}$$

$$\boldsymbol{(y_m)_{n+1} = (y_m)_n + h * \varphi_m(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n, \ldots, (y_m)_n}$$

Dada una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales que cumpla las condiciones descritas se puede obtener las funciones □i a partir de cada una de las ecuaciones diferenciales.

Para determinar dicha función hay que tener en cuenta primero el tipo de orden en la aproximación, que en general para este procedimiento está entre 1 y 4.

La aproximación más sencilla es la de primer orden, la cual coincide con el método de Euler donde se puede deducir fácilmente que:

$$\varphi(x_n, y_n) = f(x_n, y_n)$$

Las aproximaciones más utilizadas de orden superior son el segundo y el cuarto orden.
- Método de Runge-Kutta de segundo orden para dos variables:

$$\varphi(x_n, y_n) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h * k_1)$$

El método de Runge-Kutta simplifica la resolución del problema mediante un método no iterativo, lo que simplifica la obtención de una solución numérica muy aproximada, y que si se programa adecuadamente puede resultar muy eficiente (Carrascal, 2011). Las cualidades, pues que aporta son las siguientes:
- Método no iterativo: el cálculo de la solución es secuencial, pero no iterativo, esto significa que no necesita ningún criterio de convergencia, simplemente se ajusta el grado de exactitud que se quiere alcanzar desde el principio y las soluciones se calculan en serie, es decir, partiendo del valor inicial se van calculando sucesivamente los valores de la función solución.
- Ajuste sencillo de la exactitud: es fácil ajustar la exactitud, basta con aumentar el orden del método o disminuyendo la longitud de paso.

-- Simplificación del cálculo: no es necesario resolver ningún tipo de ecuación diferencial, se aplican fórmulas sencillas, derivadas de las propias ecuaciones diferenciales del problema y sin apenas modificaciones.

-- Fácilmente implementable: la sencillez del método ayuda a programar con gran facilidad y acortamiento del código de programación.

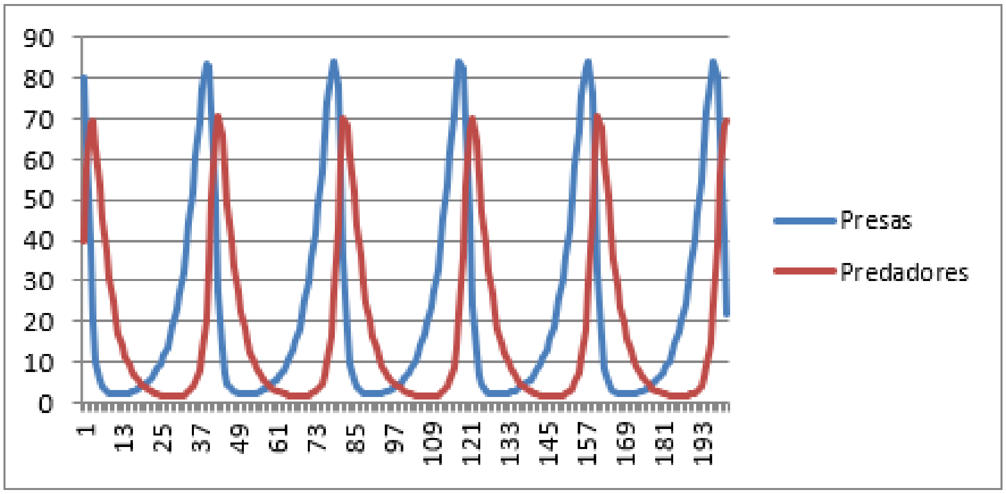

Fig. 3. Modelo presa - depredador

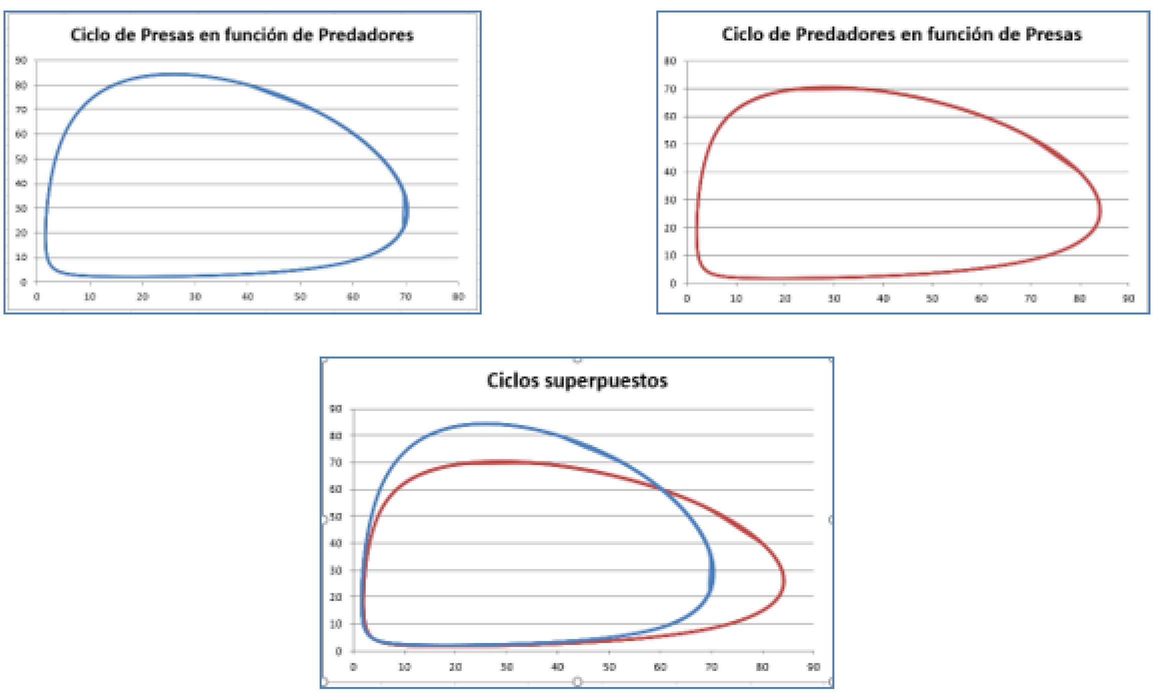

Fig. 4 Modelo presa depredador con los tres ciclos

Estas figuras muestran los cambios relativos en la densidad del depredador de presas para ambas condiciones iniciales. Las trayectorias son líneas cerradas.

Se plantea realizar un análisis para los datos siguientes:

(r) Tasa de crecimiento de las presas (Tasa de Natalidad de Presas)	0.100
(a) Tasa de eliminación de las presas por parte de los predadores (Eficiencia de	0.010
(b) Tasa de mortandad de los predadores (Tasa de Mortalidad de Predadores)	0.010
(m) Tasa de crecimiento de los predadores como resultado del consumo de presas	0.050
H(t) Población Inicial de presas	50
P(t) Población Inicial de predadores	15

En la columna A se escriben los ciclos de tiempo, en la columna B la población de presas en la C la población de predadores, en las celdas E3 y E4 se anotan las fórmulas de Runge Kuta, en las celdas G4 - G7 se anotan los títulos de los índices de presas y depredadores y H4 – H7 se escriben los índices.

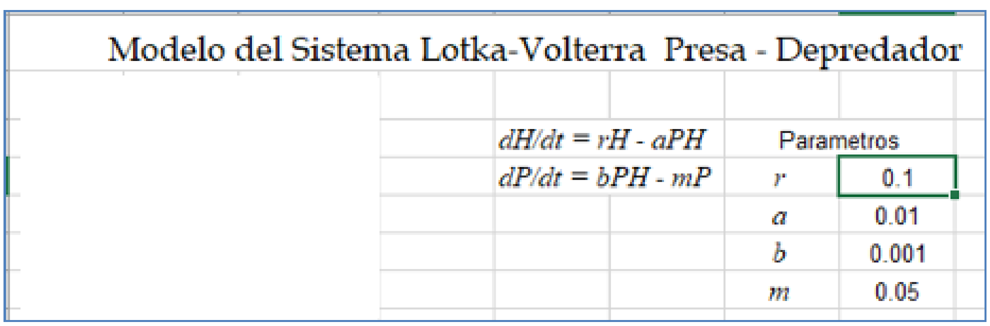

Fig. 5 Condiciones iniciales

En la celda J4 se realiza el primer cálculo: =r*B4-a*B4*C4; en la celda K4 se anota un 0; en la celda L4 se hace el cálculo: =B4+0.5*J4; en la celda M4 se calcula: =C4+0.5*K4; en la celda N4 se hace el cálculo: =r*L4-a*L4*M4 y en la celda O4: =b*L4*M4-m*M4

Se copian las fórmulas de las columnas B, C, J. K, L, M, N, O hasta que se llega a un tiempo de 200 el cual fue preestablecido con base en la experiencia de los peritos.

Modelo del Sistema Lotka-Volterra Presa - Depredador												
Tiempo	**Presa**	**Depredador**										
t	H(t)	P(t)	*dH/dt = rH - aPH*		Parametros		H'(t)	P'(t)	H(t+0.5)	P(t+0.5)	H'(t+0.5)	P'(t+0.5)
0	50	15	*dP/dt = bPH - mP*		*r*	0.1	-2.5	0	48.75	15	-2.4375	-0.01875

Fig. 6 Primeros datos calculados

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Modelo del Sistema Lotka-Volterra Presa - Depredador														
2	**Tiempo**	**Presa**	**Depredador**												
3	t	H(t)	P(t)		*dH/dt = rH - aPH*		Parametros			H'(t)	P'(t)	H(t+0.5)	P(t+0.5)	H'(t+0.5)	P'(t+0.5)
4	0	50	15		*dP/dt = bPH - mP*		*r*	0.1		-2.5	0	48.75	15	-2.4375	-0.01875
5	1	47.5625	14.98125				*a*	0.01		-2.36921	-0.03652	46.3779	14.96299	-2.30173	-0.0542
6	2	45.26077	14.9270525				*b*	0.001		-2.23002	-0.07074	44.14576	14.89168	-2.15947	-0.08718
7	3	43.1013	14.839873				*m*	0.05		-2.08605	-0.10238	42.05828	14.78869	-2.01404	-0.11745
8	4	41.08726	14.7224253							-1.94032	-0.13122	40.1171	14.65682	-1.86818	-0.14485
9	5	39.21908	14.5775735							-1.79528	-0.15716	38.32144	14.49899	-1.72408	-0.16933
10	6	37.495	14.4082461							-1.65287	-0.18018	36.66857	14.31816	-1.58341	-0.19088
11	7	35.91159	14.2173646							-1.51452	-0.2003	35.15433	14.11721	-1.44738	-0.20958
198	194	29.73492	12.9849873							-0.88758	-0.26314	29.29113	12.85342	-0.8358	-0.26618
199	195	28.89912	12.7188076							-0.78571	-0.26838	28.50627	12.58462	-0.73678	-0.27049
200	196	28.16235	12.4483171							-0.6895	-0.27184	27.81759	12.3124	-0.64325	-0.27312
201	197	27.51909	12.1751986							-0.59859	-0.27371	27.2198	12.03834	-0.55483	-0.27424
202	198	26.96426	11.9009626							-0.51258	-0.27415	26.70797	11.76389	-0.4711	-0.274
203	199	26.49316	11.6269578							-0.43103	-0.27331	26.27764	11.4903	-0.39162	-0.27258
204	200	26.10154	11.3543808							-0.35351	-0.27135	25.92479	11.2187	-0.31595	-0.27009

Fig. 7 Cálculo de todos con periodos de tiempo

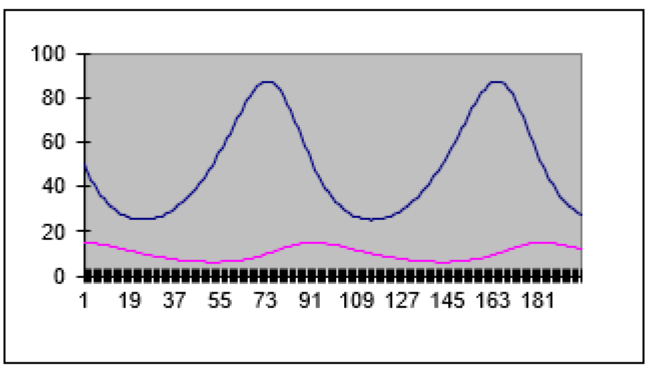

Fig. 8. Modelo para el caso de estudio

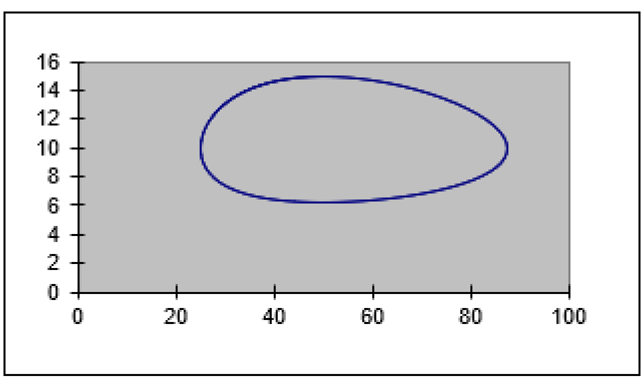

Fig. 9. Ciclo para el caso de estudio

Conclusiones

Un problema importante en la ecología es investigar la cuestión de coexistencia de las dos especies, y decidir lo que debería hacer la humanidad, si algo puede, para preservar el balance ecológico. Para responder esto y otras cuestiones relacionadas, es natural buscar una formulación matemática de este problema.

El modelo presa - depredador de Lotka-Volterra es una representación rudimentaria de la complejidad ecológica de este mundo. Supone una sola presa para el depredador, y viceversa, y tampoco asume influencias externas como la enfermedad, las condiciones cambiantes, la contaminación, etc. Sin embargo, el modelo se puede ampliar para incluir otras variables. Podemos pulir las ecuaciones agregando más variables y obtener una mejor imagen de la ecología. Pero con más variables, el modelo se vuelve más complejo y requeriría más inteligencia o recursos de computadora. También muestra una relación especial entre la biología y las matemáticas.

El modelo de Lotka y Volterra no es muy realista. No considera todas las competencias entre presas o depredadores. Como resultado, la población de presas puede crecer infinitamente sin ningún límite de recursos. Los depredadores no tienen saturación: su tasa de consumo es ilimitada. La tasa de consumo de presas es proporcional a la densidad de presas. Por lo tanto, no es sorprendente que el comportamiento del modelo no sea natural y no muestre estabilidad asintótica. Sin embargo, existen numerosas modificaciones de este modelo que lo hacen más realista.

Referencias Bibliográficas

Barreras, M. (2005). Matemáticas con Excel. Ed. Rama.

Begon, M., J. L. Harper , Townsend, C. R. (1987). Ecology: individuals, populations and communities. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 886 pp.

Carrascal, U (2011). Estadística descriptiva con microsoft excel 2010. Ed. Rama

Cifuentes, J.; Torres, P.; Frías, M. (1995). El océano y sus recursos III. Las Ciencia del Mar: Oceanografía, Física, Matemáticas e Ingeniería. Fondo de Cultura Económica. México

Diéguez, A. (2013). La función explicativa de los modelos en biología. Contrastes. Revista Internacional de Filosofía: Suplemento 18 (2013), pp. 41-54. Málaga (España)

Ortega, D. (2000). *Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Agronomía*, Tesis (en opción al título de Master en Ciencias Pedagógicas), UCLV, Santa Clara, Cuba, 2000.

Lombardero, A. (2014). *Un vistazo a la Biomatemática*. Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Volumen 86, pp 29 – 38. Recuperada el 15 de enero de 2017 de http://www.sinewton.org/numero

Ulloa, J. (2013). Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ulloa, J., Benítez, A., y Rodríguez, G. 2008. *Modelos alométricos e isométricos en Mojarra y Lobina con apoyo de tecnología*. Acta Pesquera. Volumen 1, Número 1

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2008). Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 479 488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J., Arrieta, J., y Benítez, A. 2015. *Alternativas para la elaboración de modelos matemáticos*. Acta Pesquera, Año 1. Número 1

Ulloa, J., Ortega, M,, Rodríguez, G., Benítez, A. 2015. Modelos lineales del crecimiento de la Carpa Común (Cyprinus carpio Linnaeus, 1758). Acta Pesquera, Año 1. Número 2

Ulloa, J.; Rodríguez, J. 2013. *La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático*. Revista Electrónica de Veterinaria REDVET®. España Veterinaria.org ® - Comunidad Virtual Veterinaria.org ® - Veterinaria Organización S.L. Disponible en http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n020213.html.