Determinación de Modelos de Crecimiento de Saturación por medio de Análisis Numérico

Determination of Saturation Growth Models by means of numerical analysis

José Trinidad Ulloa Ibarra1, Nidia D. Uribe Olivares[2], Juan Felipe Flores Robles[3], María Inés Ortega Arcega[1]

Recibido: marzo 29 de 2023
Aceptado: mayo 04 de 2023

DOI: https://doi.org/10.60113/ap.v9i17.5

Resumen.
Los modelos de crecimiento de saturación son un tipo de modelos que son muy utilizados en la biología pesquera, en el trabajo se analizan varios de ellos y se introduce la propuesta de una metodología que facilita la obtención de la expresión analítica que representa con un buen coeficiente de correlación datos de crecimiento. Para ello ha diferencia de otros trabajos del grupo de investigación se recurre solamente a un procedimiento algebraico básico mostrando su facilidad y el permitir llegar al resultado final por medio del análisis numérico.

Palabras clave: Análisis numérico, modelos de crecimiento, saturación

Abstract
The saturation growth models are a type of models that are widely used in fisheries biology, in the work several of them are analyzed and the proposal of a methodology that facilitates obtaining the analytical expression that represents with a good coefficient is introduced. correlation growth data. For this, unlike other works of the research group, only a basic algebraic procedure is used, showing its ease and allowing the final result to be reached through numerical analysis.

[1] Universidad Autónoma de Nayarit
[2] CBETIS 100
[3] CETMAR 26

Key words: Numerical analysis, growth models, saturation

Introducción

Los Modelos de Crecimiento de Saturación, también conocidos como modelos de crecimiento logístico, modelos sigmoidales o modelos de saturación, son un tipo de modelos matemáticos utilizados en la biología, la biología pesquera, la ecología y la economía para describir el crecimiento de una población o una variable a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta la capacidad de carga del entorno.

Estos modelos asumen que el crecimiento de una población sigue una curva en forma de "S", en la que inicialmente la tasa de crecimiento es rápida, luego disminuye a medida que la población alcanza la capacidad de carga del ambiente y finalmente se estabiliza (Figura 1). El modelo se basa en la idea de que la población no puede crecer indefinidamente debido a las limitaciones del ambiente, como los recursos limitados o la competencia entre individuos.

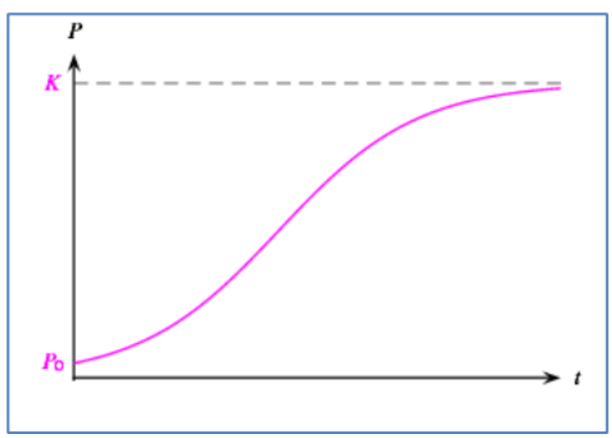


Figura No. 1. Curva de los modelos de crecimiento de saturación

El modelo más común de crecimiento de saturación es el modelo logístico, que se describe mediante una ecuación diferencial que relaciona la tasa de cambio de la población con la población misma y su capacidad de carga. El modelo logístico ha sido ampliamente utilizado para describir el crecimiento de poblaciones biológicas, como células, bacterias, plantas y animales, así como para modelar el crecimiento de la economía y las ventas de productos.

Existen diferentes ecuaciones que se utilizan para representar los modelos de crecimiento de saturación. A continuación, se presentan algunas de las más comunes:

A. Modelo logístico: El modelo logístico es uno de los modelos más utilizados para describir el crecimiento de una población que alcanza su capacidad de carga. Se puede representar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Donde:

- dN/dt es la tasa de cambio de la población con respecto al tiempo.
- N es la población en un momento dado.
- r es la tasa intrínseca de crecimiento de la población.
- K es la capacidad de carga del ambiente, es decir, el tamaño máximo de la población que el ambiente puede sostener.

Suposiciones más comunes en la determinación del modelo logístico

El modelo logístico es uno de los modelos más utilizados para describir el crecimiento de una población que alcanza su capacidad de carga. Algunas de las suposiciones más comunes en la determinación del modelo logístico son:

1. La población crece de forma exponencial hasta alcanzar su capacidad de carga: El modelo logístico asume que la población crece de forma exponencial al principio, cuando los recursos son abundantes, y que luego la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad de carga.
2. La capacidad de carga es constante: El modelo logístico supone que la capacidad de carga del ambiente es constante, es decir, que no cambia a lo largo del tiempo. En la realidad, la capacidad de carga puede variar debido a factores como el cambio climático, la alteración del hábitat y la introducción de especies invasoras.
3. No hay factores limitantes adicionales: El modelo logístico asume que la capacidad de carga del ambiente es el único factor limitante para el crecimiento de la población. En la realidad, puede haber otros factores limitantes, como la predación, la competencia por recursos y las enfermedades.
4. Las tasas de natalidad y mortalidad son constantes: El modelo logístico supone que las tasas de natalidad y mortalidad son constantes a lo largo del tiempo. En la realidad, estas tasas pueden variar debido a factores como la edad, el sexo, la densidad de la población y las condiciones ambientales.
5. La población es homogénea: El modelo logístico supone que la población es homogénea y que todos los individuos tienen las mismas tasas de natalidad y mortalidad. En la realidad, las poblaciones pueden estar compuestas por diferentes grupos de edad y sexo, con diferentes tasas de natalidad y mortalidad.

Debilidades y limitaciones del modelo logístico

El modelo logístico, como cualquier otro modelo estadístico, tiene sus propias limitaciones y debilidades. Algunas de las debilidades comunes del modelo logístico son:

1. Linealidad: El modelo logístico asume que la relación entre la variable de respuesta y las variables predictoras es lineal. Esto puede ser una limitación en casos donde la relación no es lineal.
2. Supuestos de independencia: El modelo logístico asume que las observaciones son independientes entre sí. Esto puede ser una debilidad en casos donde las observaciones están correlacionadas, como en estudios de grupos o de datos longitudinales.
3. Dependencia de las variables predictoras: El modelo logístico asume que las variables predictoras son independientes entre sí. En casos donde hay dependencia entre las variables predictoras, el modelo puede ser inexacto.
4. Ausencia de variables relevantes: El modelo logístico se basa en las variables predictoras que se incluyen en el modelo. Si hay variables importantes que no se incluyen en el modelo, entonces el modelo puede ser inexacto.
5. Sensibilidad a valores atípicos: El modelo logístico es sensible a valores atípicos en los datos. Si hay valores atípicos en los datos, entonces el modelo puede ser inexacto.
6. Problemas de convergencia: El modelo logístico puede tener problemas de convergencia cuando los datos son muy complejos o hay pocas observaciones por categoría.

B. Modelo de Gompertz: El modelo de Gompertz se utiliza para describir el crecimiento de poblaciones que experimentan una mortalidad creciente a medida que envejecen. La ecuación diferencial que lo describe es la siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = rNLn\left(\frac{K}{N}\right)$$

Donde:
dN/dt, N, r y K tienen los mismos significados que en el modelo logístico.

El modelo de Gompertz se basa en la idea de que el crecimiento de un organismo disminuye a medida que alcanza su tamaño máximo. La función matemática del modelo se expresa de la siguiente manera:
y(t) = a * exp(-b * exp(-c * t))

Donde:

- y(t) es la variable dependiente, que representa el tamaño o la masa del organismo en un momento determinado t.
- a es el tamaño máximo que alcanzará el organismo.
- b es un parámetro que controla la tasa de crecimiento del organismo.
- c es un parámetro que controla la edad a la que el organismo alcanza la mitad de su tamaño máximo.

Suposiciones más frecuentes en el modelo de Gompertz

El modelo de Gompertz es un modelo matemático utilizado para describir el crecimiento de una población o una célula. Algunas de las suposiciones más frecuentes en este modelo son:

1. La tasa de crecimiento disminuye exponencialmente: El modelo de Gompertz supone que la tasa de crecimiento de la población disminuye exponencialmente a medida que la población se acerca a su capacidad de carga. Esto significa que la población crece rápidamente al principio, cuando los recursos son abundantes, pero la tasa de crecimiento se ralentiza a medida que la población se acerca a su límite de crecimiento.
2. La capacidad de carga es finita: El modelo de Gompertz supone que la capacidad de carga del ambiente es finita, es decir, que hay un límite en el número de individuos que el ambiente puede soportar. Esto significa que la población no puede crecer indefinidamente y que eventualmente alcanzará su límite de crecimiento.
3. La tasa de mortalidad aumenta con la edad: El modelo de Gompertz supone que la tasa de mortalidad de la población aumenta exponencialmente

con la edad. Esto significa que los individuos mayores tienen una mayor probabilidad de morir que los individuos más jóvenes.

4. Todos los individuos son iguales: El modelo de Gompertz supone que todos los individuos de la población son iguales y tienen las mismas tasas de natalidad y mortalidad. En la realidad, pueden existir diferencias en las tasas de natalidad y mortalidad debido a factores como el sexo, la edad y la genética.

Debilidades y limitaciones del modelo de Gompertz

El modelo de Gompertz es un modelo matemático utilizado para describir el crecimiento de un organismo. A pesar de su utilidad en muchas aplicaciones, también tiene algunas debilidades y limitaciones, incluyendo:

1. Limitaciones en la extrapolación: Al igual que el modelo de von Bertalanffy, el modelo de Gompertz se basa en datos de crecimiento observados, lo que significa que solo puede utilizarse para predecir el crecimiento de un organismo dentro del rango de datos observados. Por lo tanto, puede haber limitaciones en la extrapolación del modelo a organismos más grandes o pequeños que no se encuentran dentro del rango observado.

2. Sensibilidad a las condiciones ambientales: El modelo de Gompertz asume que el crecimiento del organismo es constante e independiente de las condiciones ambientales. Sin embargo, el crecimiento puede verse afectado por factores ambientales, como la temperatura, la disponibilidad de alimentos y la presencia de depredadores, lo que puede afectar la precisión del modelo.

3. Falta de precisión en la predicción: El modelo de Gompertz es un modelo predictivo, lo que significa que se utiliza para predecir el tamaño o la masa de un organismo en el futuro. Sin embargo, la precisión de las predicciones del modelo puede verse afectada por varios factores, como las fluctuaciones ambientales o la variabilidad genética.

4. Dependencia de parámetros empíricos: El modelo de Gompertz utiliza una serie de parámetros empíricos que se ajustan a los datos observados. Estos parámetros pueden variar entre poblaciones y especies, lo que limita la generalización del modelo.

5. Simplificación de la realidad biológica: El modelo de Gompertz se basa en una serie de supuestos simplificadores, como la ausencia de mortalidad y la ausencia de interacciones biológicas. Estos supuestos pueden limitar la precisión del modelo en situaciones donde la realidad biológica es más compleja.

C. Modelo de von Bertalanffy: El modelo de von Bertalanffy se utiliza para describir el crecimiento de organismos que no alcanzan su tamaño máximo de forma instantánea, sino que lo hacen de forma gradual a lo largo del tiempo. La ecuación que lo describe es la siguiente:

$$\frac{dW}{dt} = k(W_\infty - W)$$

Donde:

- dW/dt es la tasa de cambio de la masa del organismo con respecto al tiempo.
- W es la masa del organismo en un momento dado.
- k es una constante de crecimiento.

W∞ es la masa máxima que el organismo puede alcanzar.

Suposiciones más comunes en el modelo de von Bertalanffy

El modelo de von Bertalanffy se utiliza para describir el crecimiento de organismos que no alcanzan su tamaño máximo de forma instantánea, sino que lo hacen de forma gradual a lo largo del tiempo. Algunas de las suposiciones más comunes en este modelo son:

1. El crecimiento es continuo: El modelo de von Bertalanffy supone que el crecimiento del organismo es continuo, es decir, que ocurre a lo largo del

tiempo. Esto significa que el tamaño del organismo puede seguir aumentando incluso después de que haya alcanzado la madurez sexual.

2. La tasa de crecimiento disminuye con el tiempo: El modelo de von Bertalanffy supone que la tasa de crecimiento del organismo disminuye a medida que el organismo se acerca a su tamaño máximo. Esto significa que el crecimiento se ralentiza a medida que el organismo se acerca a su límite de crecimiento.

3. El tamaño máximo es alcanzado de forma asintótica: El modelo de von Bertalanffy supone que el organismo nunca alcanza su tamaño máximo de forma instantánea, sino que lo hace de forma gradual y asintótica. Esto significa que el organismo se acerca cada vez más al tamaño máximo, pero nunca lo alcanza completamente.

4. El crecimiento es influenciado por factores ambientales y genéticos: El modelo de von Bertalanffy supone que el crecimiento del organismo es influenciado por factores ambientales y genéticos. Los factores ambientales incluyen la disponibilidad de alimento y la temperatura del ambiente, mientras que los factores genéticos incluyen la herencia y las mutaciones.

Es importante tener en cuenta que estas suposiciones son ideales y que en la realidad pueden existir factores que afecten el crecimiento de la población y que no se consideran en el modelo de Gompertz. Por lo tanto, es importante evaluar cuidadosamente los datos y la validez de las suposiciones antes de aplicar el modelo de Gompertz para describir el crecimiento de una población.

Debilidades y limitaciones del modelo de von Bertalanffy

El modelo de von Bertalanffy, también conocido como modelo de crecimiento de organismos, tiene algunas debilidades y limitaciones. Algunas de ellas son:

1. Aplicabilidad limitada: El modelo de von Bertalanffy es más adecuado para organismos que tienen un crecimiento continuo y uniforme, y no para organismos con cambios estacionales o intermitentes en su crecimiento.

2. Falta de precisión en la predicción: El modelo de von Bertalanffy es un modelo predictivo, lo que significa que se utiliza para predecir el tamaño o la masa de un organismo en el futuro. Sin embargo, la precisión de las predicciones del modelo puede verse afectada por varios factores, como las fluctuaciones ambientales o la variabilidad genética.

3. Limitaciones en la extrapolación: El modelo de von Bertalanffy se basa en datos de crecimiento observados, lo que significa que solo puede utilizarse para predecir el crecimiento de un organismo dentro del rango de datos observados. Por lo tanto, puede haber limitaciones en la extrapolación del modelo a organismos más grandes o pequeños que no se encuentran dentro del rango observado.

4. Dependencia de parámetros empíricos: El modelo de von Bertalanffy utiliza una serie de parámetros empíricos que se ajustan a los datos observados. Estos parámetros pueden variar entre poblaciones y especies, lo que limita la generalización del modelo.

5. Sensibilidad a las condiciones ambientales: El modelo de von Bertalanffy asume que el crecimiento del organismo es constante e independiente de las condiciones ambientales. Sin embargo, el crecimiento puede verse afectado por factores ambientales, como la temperatura, la disponibilidad de alimentos y la presencia de depredadores, lo que puede afectar la precisión del modelo.

A continuación se presenta un ejemplo de datos de crecimiento de peces que se pueden utilizar para proponer un modelo sigmoidal:

Edad (meses)	Peso (gramos)
1	10
2	20
3	35
4	60
5	90
6	130
7	180
8	230
9	290
10	360
11	390
12	410
13	422
14	425
15	428

Estos datos muestran el peso de un pez en función de su edad en meses. Podemos utilizar estos datos para proponer un modelo sigmoidal Figura No. 2 que describa el crecimiento del pez a lo largo del tiempo

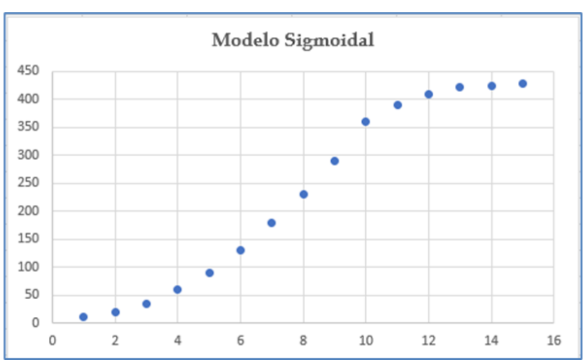


Fig. No. 2 Curva Sigmoidal

La grafica de los datos (Figura 2) tiene una forma sigmoidal por lo que se pueden utilizar para proponer algunos de los modelos sigmoidales descritos anteriormente ya que permiten modelar el crecimiento de los organismos. Al ajustar los parámetros del modelo a los datos de crecimiento del pez, podemos utilizar el modelo para predecir su crecimiento futuro y estimar su tamaño o peso en cualquier punto del tiempo. La forma de S en muchos de los casos no se presenta de forma tan clara, por lo que se deben considerar algunas otras características de los datos y el tipo de problema en estudio para decidir se opta por tomar uno de estos.

Para poder utilizar correctamente un modelo, es necesario conocer bien el problema y definirlo con precisión, que es uno de los aspectos más importantes en la solución de todo problema. Un error que se presenta frecuentemente es que las personas prestan poca atención a la definición del problema, lo cual da como resultado un trabajo de mala calidad o la repetición de este.

Antecedentes

La modelación en crecimiento de peces ha sido objeto de estudio durante décadas y ha sido abordada desde diferentes perspectivas, incluyendo la relación entre la longitud y la edad, la relación entre la longitud y la tasa de crecimiento, la relación entre la edad y el peso, entre otros factores. Los modelos desarrollados han tenido en cuenta diferentes variables ambientales y biológicas que influyen en el crecimiento de los peces, lo que ha permitido una mejor comprensión de los procesos de crecimiento y ha ayudado a mejorar la gestión y producción acuícola.:

.

1. La modelación del crecimiento de los peces es un tema de interés en la investigación acuícola. A continuación, se presentan algunos antecedentes sobre la modelación en crecimiento de peces:
2. En 1938, el biólogo y estadístico W. L. Le Cren propuso un modelo de crecimiento para peces que aún se utiliza en la actualidad. Este modelo se basa en la relación entre la longitud del pez y la edad, y tiene en cuenta la velocidad de crecimiento relativo del pez en diferentes etapas de su vida.
3. En 1977, el biólogo marino E. D. Lea desarrolló un modelo de crecimiento para peces que se basa en la relación entre la longitud del pez y la tasa de crecimiento. Este modelo tiene en cuenta la relación entre la temperatura del agua y la tasa de crecimiento del pez.
4. En 1996, el biólogo R. Froese y su equipo desarrollaron una base de datos de crecimiento de peces llamada FishBase. FishBase contiene información sobre la morfología, la distribución geográfica y el ciclo de vida de las especies de peces, incluyendo la información sobre el crecimiento.
5. En 2008, el biólogo A. Gislason y su equipo desarrollaron un modelo de crecimiento para peces que tiene en cuenta la relación entre la edad y el peso del pez. Este modelo se basa en la idea de que el crecimiento de los peces es una función de la cantidad de energía que el pez consume y utiliza para la producción de tejido.
6. En 2012, el biólogo K. D. Cubillos y su equipo desarrollaron un modelo de crecimiento para peces que se basa en la relación entre la longitud y la edad del pez, y que tiene en cuenta la variabilidad interanual en la tasa de crecimiento.
7. En 2018, el biólogo J. C. Ostberg y su equipo desarrollaron un modelo de crecimiento para peces que tiene en cuenta la relación entre el tamaño del pez y la tasa de crecimiento. Este modelo utiliza técnicas estadísticas avanzadas para modelar la variabilidad interanual en la tasa de crecimiento de los peces.

En el ámbito local (Universidad Autónoma de Nayarit), la investigación tiene diversos antecedentes, los principales antecedentes son los trabajos acerca de la modelación como práctica social y las prácticas de análisis de los resultados de la composición de las especies. Uno de los aspectos fundamentales de esta línea de investigación consiste en situar el estudio de las prácticas de modelación en una comunidad, en un lugar y en un tiempo (Ulloa, 2013).

Justificación

El estudio de modelos de crecimiento de peces mediante modelos sigmoidales es que estos permiten describir de manera precisa y sencilla los patrones de crecimiento que presentan los peces a lo largo de su vida. Los modelos sigmoidales se caracterizan por tener una fase inicial de crecimiento lento, una fase media de crecimiento acelerado y una fase final de crecimiento más lento, lo que se corresponde con el patrón de crecimiento que suelen presentar la mayoría de las especies de peces.

Al ajustar un modelo sigmoidal a los datos de crecimiento de los peces, se pueden obtener parámetros como la tasa de crecimiento máxima, la edad y tamaño en el que se alcanza la tasa de crecimiento máxima, la tasa de crecimiento inicial, entre otros, lo que permite comprender mejor los procesos de crecimiento de los peces y su relación con las condiciones ambientales. Pero también este tipo de modelos puede ser útil en la gestión y producción acuícola, ya que permite predecir el crecimiento de los peces y ajustar las prácticas de alimentación y manejo en consecuencia, lo que lo que puede contribuir a una producción más eficiente y sostenible.

Marco Teórico

Ubicamos a la teoría Socioepistemológica como el marco ideal ya que se basa en el análisis de las prácticas de las comunidades ya sean de estudio, de práctica o profesionales considerando al grupo social en el que se desarrollan las actividades como el aspecto preponderante para entender la generación del conocimiento.

La Socioepistemología es una teoría que se basa en el estudio de la epistemología de prácticas considerando los aspectos socioculturales ligados a la producción y difusión de conocimiento matemático, así como los aspectos que atañen a los procesos de cognición, de naturaleza didáctica y construcción de dicho conocimiento (Cordero, 2005). En esta teoría se parte del supuesto de que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento, para con ello poder modelar la práctica que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Cordero, 2001).

Metodología

El trabajo se desarrolla bajo un enfoque cuantitativo y se utilizaron datos de crecimiento del marlín rayado (*Tetrapturus audax)*, se tomó como base el análisis numérico puesto que solo se requieren conocimientos básicos de la aritmética y del algebra.

El análisis o cálculo numérico es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos para simular aproximaciones de solución a problemas en análisis matemático. Se distingue del cómputo simbólico en que no manipula expresiones algebraicas, sino números, es una vía de solución alterna que permite conectar la teoría y la práctica al nivel que se quiera de medición y cálculo, pero en una forma diferente a como normalmente se enseña la operación analítica de los conceptos (Ulloa, et. al., 2020). Se utilizará en especial el método de mínimos cuadrados descubierto por Gauss en 1797 (Rebolledo, 2012),

Lo anterior se desarrolla bajo la Deconstrucción como estrategia de la modelación, la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final y su estructura es espiral y no lineal. Para su utilización como estrategia de modelación matemática, se propone como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo (Ulloa y Arrieta 2008).

La deconstrucción evoca al término creado por Derrida (1985), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender.

En la primera etapa se toma cada uno de los modelos, se linealiza y se hacen los comparativos del original y del linealizado a fin de establecer analogías y con ello poder calcular el coeficiente de correlación.

Resultados

Datos de crecimiento del marlín rayado (*Tetrapturus audax)*

Tabla 1. Datos para obtención del modelo

Tabla 1. Datos para obtención del modelo

años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
cm	100	120	148	160	175	185	188	192	196	198	200

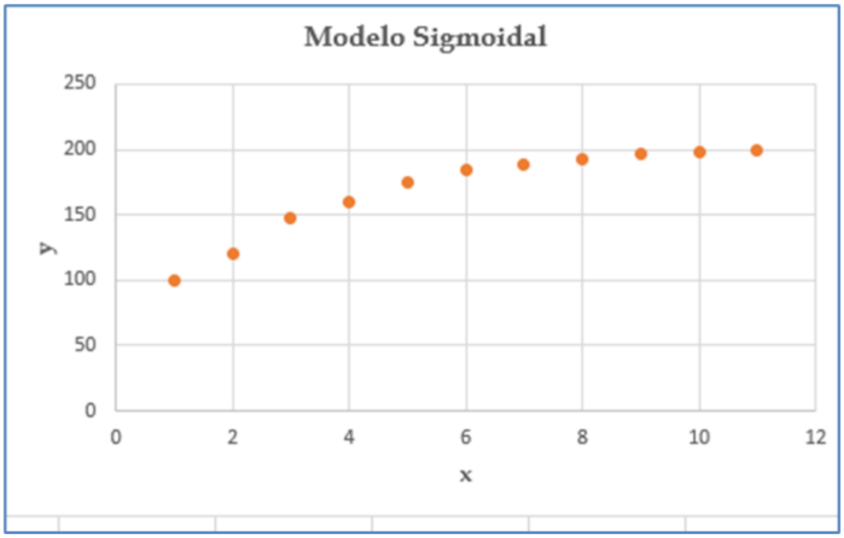


Figura No. 3. Datos de marlín rayado

Modelo Linealizado mediante la inversión de los valores de x e y:

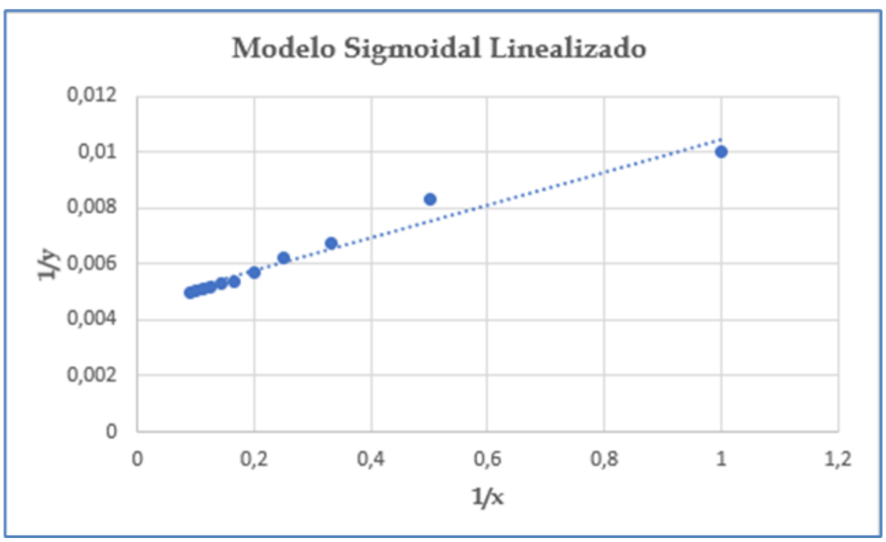


Figura No. 4. Curva linealizada de los datos de marlín rayado

La figura No. 4 representa una metodología descrita para los modelos de crecimiento de saturación descrito por Quintana, Villalobos & Cornejo (2005), mismo que se describe de manera analítica a continuación:

La ecuación que caracteriza el crecimiento de la población bajo condiciones limitantes es la siguiente:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x}$$

Al reordenar la ecuación:

$$\frac{a_1 + x}{a_0 x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{1}{a_0}$$

Esta ecuación representa la ecuación de una línea recta en la que la pendiente es a_1/a_0 y la ordenada al origen es $1/a_0$

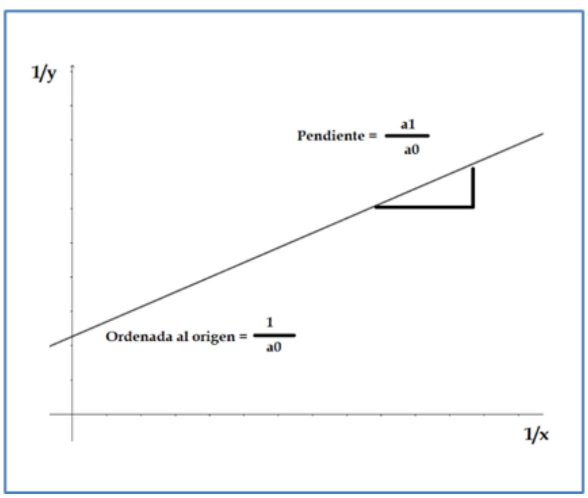


Figura No. 5. Parámetros del modelo linealizado

Al aplicar el método de mínimos cuadrados a la última ecuación se obtienen las siguientes ecuaciones para calcular la pendiente y la ordenada al origen:

Para la pendiente

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{n\sum \frac{1}{x_i}\frac{1}{y_i} - \sum \frac{1}{x_i}\sum \frac{1}{y_i}}{n\sum \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 - \left(\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)\right)^2}$$

Para la ordenada al origen

$$\frac{1}{a_0} = \overline{\left(\frac{1}{y_i}\right)} - \frac{a_1}{a_0}\overline{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Para el cálculo de los coeficientes de determinación y correlación se requiere:

$$S_R = \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{a_0} - \frac{a_0}{a_1 * x_1}\right)^2$$

$$S_T = \left(\frac{1}{y_i} - \overline{\frac{1}{y}}\right)^2$$

Coeficiente de Determinación:

$$r^2 = \frac{S_T - S_R}{S_T}$$

Coeficiente de Correlación

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}}$$

A continuación se presenta un resumen de los cálculos:

	x	y	1/x	1/y	(1/x)(1/y)	(1/x)^2
	1	100	1	0,01	0,01	1
	2	120	0,5	0,00833333	0,00416667	0,25
	3	148	0,33333333	0,00675676	0,00225225	0,11111111
	4	160	0,25	0,00625	0,0015625	0,0625
	5	175	0,2	0,00571429	0,00114286	0,04
	6	185	0,16666667	0,00540541	0,0009009	0,02777778
	7	188	0,14285714	0,00531915	0,00075988	0,02040816
	8	192	0,125	0,00520833	0,00065104	0,015625
	9	196	0,11111111	0,00510204	0,00056689	0,01234568
	10	198	0,1	0,00505051	0,00050505	0,01
	11	200	0,09090909	0,005	0,00045455	0,00826446
Suma =	**65**	**1862**	**3,01987734**	**0,06813981**	**0,02296259**	**1,55803219**
Promedio =			**0,2745343**	**0,00619453**		

a1 / a0 = 0,00583818 a0 / a1 = 171,286258

1/a0 = 0,004591747

a0 = 217,7820124

a1 = 1,271450582

Sr	St
(1/y-1/a0 - a0/a1 x)^2	(1/y -1/y)^2
1,84838E-07	0,069978398
6,765E-07	0,070862957
4,79388E-08	0,071704815
3,94847E-08	0,071976468
2,03381E-09	0,072264202
2,53994E-08	0,072430364
1,13687E-08	0,0724768
1,28112E-08	0,072536479
1,91527E-08	0,072593744
1,56401E-08	0,072621518
1,50041E-08	0,072648741
1,05017E-06	**0,792094486**

Coeficiente de determinación	**r^2 =**	**0,9999**
Coeficiente de Correlación	**r =**	**0,9999**

Por lo que el modelo queda representado por la ecuación:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x} = 217.782 \frac{x}{1.2714 + x}$$

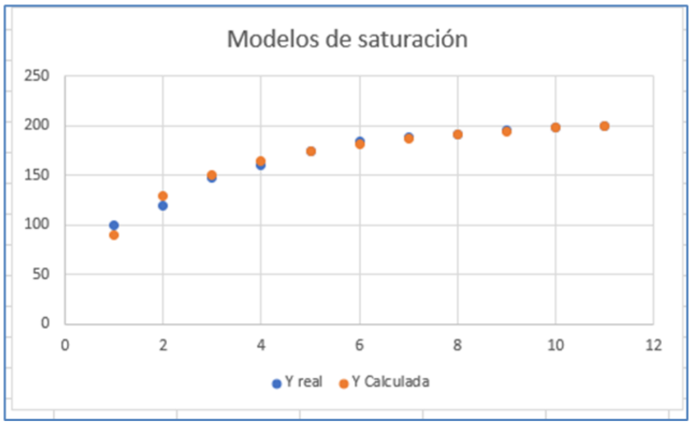
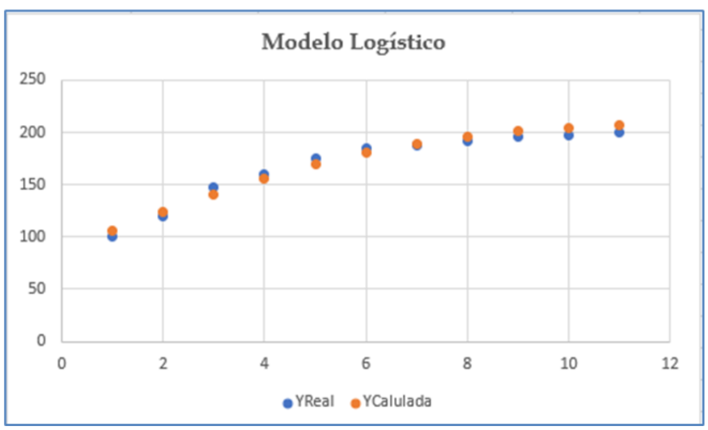


Figura No.6. Gráfico de los datos reales VS datos calculados

Como puede observarse en la figura No. 6 las dos curvas están prácticamente solapadas lo que indica que el modelo propuesto representa con bastante exactitud los datos del problema, esto además queda evidente con la determinación del coeficiente de correlación.

Procediendo de igual manera con el procedimiento anterior se tiene lo siguiente:



Modelo Logístico

$$y = \frac{K}{1 + A * e^{-Bx}}$$

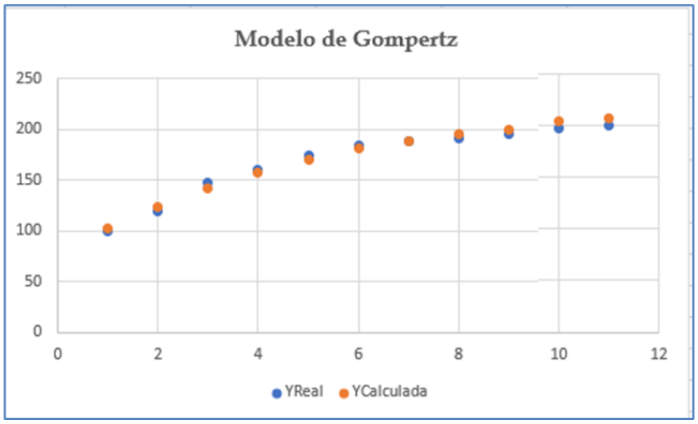
$$y = \frac{215}{1 + 1.4435 * e^{-0.3374x}}$$

Coeficiente de determinación	**r^2 =**	**0,976**
Coeficiente de Correlación	**r =**	**0,9879**

Modelo de Gompertz

$$y = K * e^{-A*e^{-Bx}}$$

$$y = 215 * e^{-0.9823*e^{-0.289x}}$$



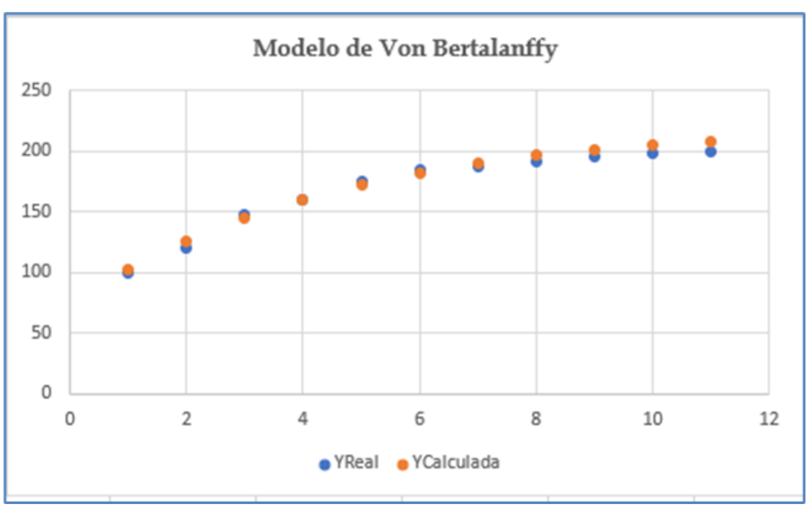
Coeficiente de determinación $r^2 =$ **0.984**

Coeficiente de Correlación **r =** **0.9922**

Modelo de Von Bertalanffy

$$y = K(1 - A * e^{-Bx})^3$$

$$y = 217(1 - 0.2892 * e^{-0.2732x})^3$$



Coeficiente de determinación $r^2 =$ **0.9869**

Coeficiente de Correlación $r =$ **0.9934**

Discusión

La metodología utilizada para la obtención de los modelos a pesar de ser una herramienta de la ingeniería y las matemáticas la que se utilizó es con base en su facilidad por el tipo de conocimiento requerido. No obstante, y tomando la definición de Coeficiente de Correlación: el valor de r denota la fuerza de la asociación.

Si bien de manera tradicional los modelos más utilizados por los profesionales del área son el de Von Bertalanffy, Gompertz y el Logístico en el caso de los datos analizados queda de manifiesto que el modelo de crecimiento de saturación descrito por Quintana, Villalobos & Cornejo (2005), representa de manera igual o mejor que los anteriores y en muchos casos los supera.

A lo anterior se puede agregar que el manejo algorítmico resulta ser más sencillo y rápido ya que la linealización se efectúa por medio de álgebra básica y no requiere el uso de logaritmos, por lo que se considera como una buena opción para profesionales que no tienen una formación fuerte en matemáticas.

Conclusiones

Cómo lo menciona Ulloa et al, 2021, el grupo de trabajo elabora diferentes propuestas que faciliten la modelación en casos en el que se tiene poca habilidad en el uso de las ecuaciones diferenciales, o en los casos propuestos anteriormente la utilización de los logaritmos, esto sigue otro de los procedimientos utilizados por el grupo: la Deconstrucción (Ulloa, 2013), de los trabajos del área de la pesca y la acuicultura en la que se requiere el uso de la matemática.

Referencias Bibliográficas

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4 (2), 103-128

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa8 (3), 265-286.

Cubillos, K. D., & Morales-Nin, B. (2012). Modeling growth of common pandora, Pagellus erythrinus (Linnaeus, 1758), using length-frequency data. Scientia Marina, 76(3), 431-441.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En Jaques Derrida, ¿Cómo no hablar? Y otros textos. Suplementos Antrhopos, 13, 86 – 89.

Froese, R., & Pauly, D. (Eds.). (1996). FishBase 96: concepts, design and data sources. International Center for Living Aquatic Resources Management.

Gislason, A., Daan, N., & Rice, J. C. (2008). Development of the ecological and economical model for the North Sea. ICES Journal of Marine Science, 65(8), 1552-1565.

Lea, E. D. (1977). The biology of Serranus subligarius (Serranidae) in the temperate waters of North Carolina. Fishery Bulletin, 75 (1), 203-212.

Le Cren, W. M. (1938). The length-weight relationship and seasonal cycle in gonad weight and condition in the perch (Perca fluviatilis). Journal of Animal Ecology, 7(2), 201-219.

Ostberg, J. C., & Schindler, D. E. (2018). A quantitative framework for investigating ecological thresholds in exploited marine ecosystems. Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences, 75(4), 563-577.

Quintana, P., Villalobos, E., & Cornejo, M. del C. (2005). *Métodos Numéricos con aplicaciones de Excel* (1.ª ed., p. 137, 138, 143, 144, 145). Barcelona, España: Edtorial Reverté. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Rebolledo, F. (2012). La ciencia nuestra de cada día, II. Fondo de Cultura Económica, pp. 44.

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2008). *Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción*. En C. Patricia Lestón (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, (pp. 479-488). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ulloa, J. (2013). Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Distrito Federal, México.

Ulloa, J.; Uribe, N.; Flores, J.; Ortega, M. (2020). Análisis numérico para la determinación de modelos potenciales en la Lobina Negra Micropterus Salmoides (Lacépède, 1802). Acta Pesquera, Vol. 6, No. 11. Universidad Autónoma de Nayarit.

Ulloa, J.; Ramos, D.; Uribe, N.; Flores, F.; Ortega, M. (2021). Análisis numérico para determinar modelos asociados a la composición proximal de corvina (Cynoscion Parvipinnis). Acta Pesquera, Vol. 7, No. 13. Universidad Autónoma de Nayarit