
Comparación de cinco modelos de crecimiento para pargo lunarejo *Lutjanus coeruleolineatus* (Rüppell, 1838)

Comparison of five growth models for moon snapper *Lutjanus coeruleolineatus* (Rüppell, 1838)

José Trinidad Ulloa Ibarra¹, Nidia D. Uribe Olivares², Juan Felipe Flores Robles³, María Inés Ortega Arcega¹

Universidad Autónoma de Nayarit

² CBETIS 100

³ CETMAR 26

Recibido: 05 de abril de 2022

Aceptado: 04 de junio de 2022

Resumen.

Con este trabajo se hace una nueva contribución a los trabajos de modelación que realiza el equipo de matemática - modelación y es una propuesta para determinar con base en un análisis estadístico cuál es el mejor modelo que representa los datos de Pargo Lunarejo. El sustento teórico para el trabajo es la Socioepistemología dado que se analizan las actividades de una comunidad de profesionales y que su resultado puede ser utilizado por diferentes grupos de la comunidad. La importancia biológica, social y económica de los peces y de la pesca ha incentivado el desarrollo de modelos matemáticos que permiten, por un lado, sintetizar el ciclo de vida de los peces incluyendo la influencia del ecosistema y el efecto de la pesca, y por otro, estimar cuantos peces hay en el presente y predecir cuantos habrá en el futuro. Estos modelos permiten convertir ecuaciones en un beneficio tangible para la sociedad y el ecosistema. Las curvas del crecimiento reflejan la relación entre la edad del animal y el desarrollo propio del individuo para crecer y madurarse corporalmente en el ambiente en el cual se desarrolla.

Palabras clave: Modelos de crecimiento, pargo, comparación

Abstract

With this work, a new contribution is made to the modeling work carried out by the mathematics-modeling team and it is a proposal to determine, based on a statistical analysis, which is the best model that represents the Pargo Lunarejo data. The theoretical support for the work is Socioepistemology since the activities of a community of professionals are analyzed and its result can be used by different groups in the community. The biological, social and economic importance of fish and fishing has encouraged the development of mathematical models that allow, on the one hand, to synthesize the life cycle of fish including the influence of the ecosystem and the effect of fishing, and on the other another, estimating how many fish there are in the present and predicting how many there will be in the future. These models allow equations to be converted into a tangible benefit for society and the ecosystem. The growth curves reflect the relationship between the age of the animal and the individual's own development to grow and mature bodily in the environment in which it develops.

Key words: Growth models, snapper, comparison

Introducción.

El desarrollo de este trabajo queda enmarcado en la línea de investigación iniciada por Arrieta, 2003 en la que se pretende explicar la relación entre las prácticas sociales, la de comunidades de profesionistas y la construcción del conocimiento, la comunidad base es la de los profesionales de la pesca. Con esto se muestra una propuesta desarrollada por el grupo de modelación del Cimate en Nayarit que trata de dar respuesta a un problema surgido en el área biológico agropecuaria y pesquera de Universidad Autónoma de Nayarit.

Con la modelación matemática se intenta facilitar la comprensión de los fenómenos de la naturaleza, pero para ello es necesario elegir de manera adecuada el problema de estudio, pues no debemos olvidar que los fenómenos reales relevantes son tan complejos que su estudio ha

requerido distintas aproximaciones metodológicas (Creswell, 2003) y ha dado origen a las diferentes ciencias que han evolucionado durante siglos hasta alcanzar su expresión actual.

La modelación matemática se utiliza no solo para la representación de fenómenos naturales, pero también para hacer predicciones con base en lo observado y su análisis, es así que encontramos predicciones en las diferentes ciencias y es quizá por esta razón que la modelación ha logrado una gran importancia, ya que con la predicción se apoya la toma de decisiones.

La actividad pesquera en México y en el mundo representa un sector de gran importancia no solo económica y social sino también ecológica. Hace ya bastante tiempo que se consideraba que era imposible que los recursos pesqueros se acabaran, se trata de una época donde la explotación se hacía en forma muy distinta a como se hace actualmente y se tienen registros de algunas especies que han sido sobreexplotadas lo que origina que otras especies que comparten el mismo ecosistema se vean afectas.

Se sabe que hay algunos recursos que se pueden agotar lo que lleva al peligro de la subsistencia de muchas familias que dependen de ellos, esto hace necesario que se realicen estudios que revelen hasta qué punto es pesca puede ser sostenible de tal suerte que la especie se preserve y que la captura esté basada en un límite para dejar siempre una cantidad de peces que puedan reproducirse con éxito y se llegue también a la rentabilidad económica.

Surge entonces la pregunta de cómo conocer la cantidad de peces que hay en una determinada zona, debido a la movilidad de los peces resulta casi imposible hacer determinaciones con los sistemas de monitorización con que cuentan las embarcaciones, por lo que solo se pueden hacer aproximaciones y es aquí donde las matemáticas empiezan a ser útiles. La cantidad de peces en un área se aproxima usando modelos matemáticos.

Se pueden establecer modelos matemáticos para determinar el número de reproductores de una temporada, así como el número larvas que llegan a edad adulta. Esos modelos necesitan datos con los cuales se contrastan las estimaciones que se hacen. Por un lado, se necesitan los registros realizados por los pescadores y los organismos de investigación que realizan periódicamente campañas oceanográficas en las cuales un barco con una ecosonda traza una ruta delimitando una zona determinada, y este barco a su vez pesca pequeñas cantidades para hacerse una idea del tamaño, peso, madurez y edad de los peces que se ven con la ecosonda. Toda la información proveniente de las capturas y de las campañas son el alimento de los modelos matemáticos. Estos modelos permiten convertir ecuaciones en un beneficio tangible para la sociedad y el ecosistema.

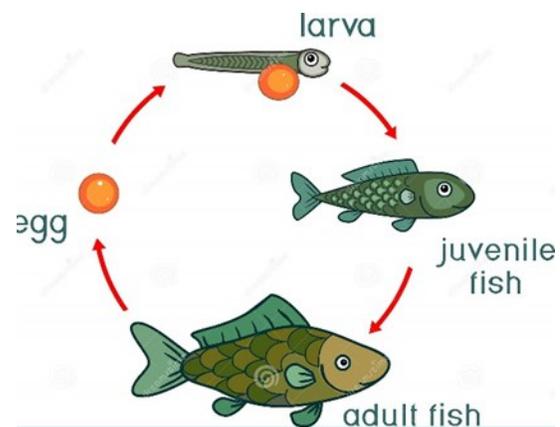


Figura 1. Ciclos de vida de los peces

Para estudiar el crecimiento en las ciencias pesqueras es necesario recurrir a una serie de conceptos propios de la matemática, tales como asíntotas, puntos extremos, puntos de inflexión y obviamente a la resolución de ecuaciones diferenciales, lo que en el caso de las escuelas del área resulta imposible, por lo que se necesitan métodos alternativos para dar respuesta a las actividades de modelación (Ulloa, et al. 2017).

La investigación que se utiliza en las ciencias del mar sea cual fuere la índole de su especialidad, basada en la observación de fenómenos colectivos o en numerosas observaciones respecto a uno en

particular, debe siempre representarse numéricamente para lograr una comprobación experimental. Esto da, en gran medida, mayor rigor y validez a la mirada de conjunto y a la proposición de las conclusiones. Permite, asimismo, hacer predicciones, sobre todo de aquellos fenómenos cuya variación es tan grande que difícilmente se pueden expresar con rígidas fórmulas matemáticas, como en el caso de los fenómenos biológicos, psicológicos y sociológicos (Cifuentes, Torres & Frías, 1995)

Aspectos biológicos y ecológicos del recurso

Nombre común: Pargo lunarejo, pargo flamenco, huachinango, pargo de aleta negra, pargo chivato o pargo prieto.

Nombre científico: *Lutjanus guttatus* (Steindachner, 1869).

Nivel de dominio de biotecnología: Incompleta.

Origen: Pacífico oriental, desde el Golfo de California, México, hasta Perú.

Estatus del cultivo: Fomento.

Mercado: Nacional.

Distribución Geográfica: Especie endémica del Pacífico oriental tropical y subtropical, su distribución se extiende desde la costa suroccidental de Baja California Sur y Golfo de California, México, hasta Perú.

Entidades con cultivo: Baja California, Baja California Sur, Jalisco, Michoacán, Nayarit, Oaxaca y Sinaloa.

Morfología: Pez óseo con cuerpo fusiforme comprimido. Aleta pélvica y anal amarilla. Aleta dorsal con 10 espinas y de 12 a 13 radios; Aleta anal con tres espinas y ocho radios; aleta pectoral con 17 radios. Primer arco branquial con 14 branquiespinas. Dientes mandibulares cónicos o caniniformes; dientes vomerinos dispuestos en forma de media luna o triángulo. Cabeza con manchas y líneas discontinuas azul celeste pálido; flancos rojo pálido, verde-amarillo o amarillo-pardo, con brillo plateado y con bandas azul celeste pálido;

una mancha circular negra o parda, ubicada a los costados, ligeramente por delante del origen de los primeros radios de la aleta dorsal. Alcanzan hasta 80 cm de longitud y 4 kg.

Ciclo de vida: Longevidad de 23.3 años. Presentan ontogenia indirecta. Huevos pelágicos de 650 a 776 μm de diámetro. La eclosión de estos ocurre entre 18 y 20 h a 29-31 °C. Presenta una larva pelágica típica. El periodo juvenil inicia con la formación de escamas ctenoideas y termina con la primera maduración sexual a los 30.6 cm de longitud patrón y 350 g. El patrón de maduración gonádica en adultos es gonocórica con desarrollo asincrónico y desoves parciales, los cuales se presenta generalmente entre la tarde y la noche. No presenta cuidado paternal. Fecundidad relativa de 20,000 a 50,000 huevos/kg.

Hábitat: Especie marina, estenohalina y bentopelágica que durante el periodo adulto se encuentra en arrecifes costeros, hasta por lo menos 30 m de profundidad. Los juveniles concurren en sistemas estuarino-lagunares.

Alimentación en medio natural: Carnívoro oportunista de hábitos crepusculares y nocturnos, depreda especies bentónicas y bentopelágicas de peces, crustáceos, moluscos y anélidos.

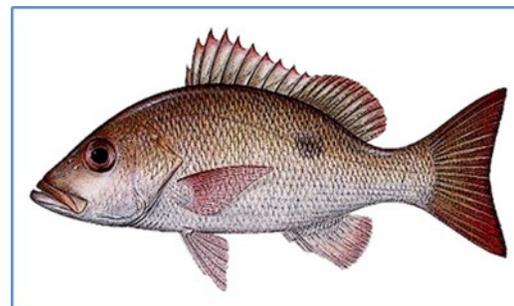


Figura 2. Pargo Lunarejo

El problema

La modelación es una práctica que se ejerce en diversas comunidades, es una actividad recurrente y les otorga identidad, con base en diferentes estudios consideramos que puede funcionar como un vínculo entre la escuela y su entorno. Para ello se realizan investigaciones sobre las prácticas de modelación de comunidades, en este caso, de profesionales de la pesca. Las prácticas de esta comunidad se encuentran constituidas, y como tal, al igual que otros muchos procesos se realizan de forma casi mecánica o algorítmica, (Ulloa y Arrieta, 2012).

Modelos matemáticos

De forma general, de acuerdo con (Parra y otros, 2019), “un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que describe las relaciones entre un conjunto de objetos que conforman un sistema”. Resolviendo estas ecuaciones podemos imitar o simular el comportamiento del sistema. En (San Cristóbal, 2004) se indica que “un modelo matemático es una ecuación o un conjunto de ecuaciones que describen un fenómeno de cualquier índole”. Sus soluciones se aproximarán a la realidad del fenómeno en estudio con cierto margen de error, dependiendo de los parámetros de cada modelo. Además, en (Ladino Martínez, 2012) se afirma que “la posibilidad de modelar matemáticamente un sistema tiene su importancia en poder predecir con determinado acierto el comportamiento futuro de éste, en circunstancias que no pueden o son difíciles de ser reproducidas en un laboratorio”. Finalmente, en (Ulloa Ibarra y otros, 2013) se concluye que:

En la actualidad los modelos matemáticos han

ganado mayor importancia, debido a su relación con todas las ciencias. Por esta razón los modelos matemáticos nos son útiles para predecir fenómenos o para la toma de decisiones cuando son aplicados a varios fenómenos de las diferentes ciencias de estudio; cuando su aplicación e interpretación son correctas, estos son de gran ayuda y nos pueden evitar grandes costos.

El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro. Los pasos para elaborar un modelo matemático pueden ser:

- Encontrar un problema del mundo real
- Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
- Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
- Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso. Los modelos simbólicos o matemáticos están constituidos por todas las ecuaciones matemáticas requeridas para representar satisfactoriamente un fenómeno o experimento. Cuando se usan los modelos matemáticos, a veces es posible determinar, mediante un proceso deductivo, cuáles serán los resultados de un experimento sin realizarlo. Generalmente esto ahorra tiempo, trabajo y dinero, y proporciona resultados aún más precisos que los que se pueden obtener por medio de la simulación. En la figura No. 3 se muestra el proceso metodológico para la desarrollar modelos.

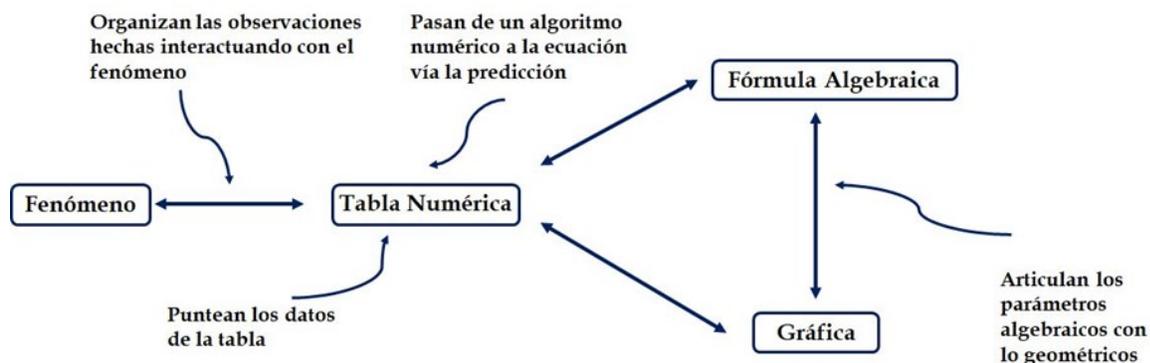


Figura 3. La numerización de los fenómenos (Arrieta y Díaz, 2015)

Antecedentes

Los modelos de crecimiento en el área de estudio. El interés sobre cómo la población tiende a crecer fue simulado a finales del siglo 18 cuando Thomas Malthus ([1798] 1970) publicó un ensayo sobre el principio de cómo afectan las poblaciones el progreso de la sociedad del futuro. En su libro Malthus puso un modelo de crecimiento exponencial para la población humana y concluyó que en el futuro esa población excedería la capacidad de crecimiento del suministro adecuado de alimentos. El crecimiento o el declive de poblaciones naturales y la lucha de las especies por predominar unas sobre otras ha sido objeto de interés en todas las épocas. Hace siglos que se observó la aplicación de conceptos matemáticos muy simples al estudio de tales cuestiones. Los pioneros del estudio matemático (aportaron modelos) son Malthus (1798), Verhulst (1838), Lotka y Volterra (1925) cuyos trabajos se publicaron en los años 20 y 30 del siglo pasado, respectivamente. Cabe señalar que Euler (1758) ya había sugerido el llamado modelo Malthusiano o de crecimiento

exponencial. Se puede afirmar con base en observaciones de campo que los modelos de crecimiento que se estudian en el área son: el modelo de Malthus (exponencial), Verhulst (logístico), Von Bertalanffy, Lotka -Volterra y algunos modelos potenciales que relaciona entre otras cosas la relación talla -peso.

Desarrollo.

De observaciones realizadas con el pargo lunarejo se desea conocer la dinámica de crecimiento y dar respuesta a la interrogante: ¿cuál es el modelo más apropiado y preciso? Para esto se hace el comparativo entre cinco modelos.

En el procesamiento y análisis de la problemática es necesario considerar:

- o Graficación de puntos para analizar tendencia de datos
- o Selección del tipo de modelo a ajustar
- o Ajuste del modelo, con el apoyo de un software apropiado
- o Descripción del proceso a partir del modelo obtenido.

Tabla 1. Datos del Pargo Lunarejo
Talla del Pargo Lunarejo, Lutjanus coeruleolineatus (Rüppell, 1838)

Edad (años)	Longitud (cm)		Edad (años)	Longitud (cm)
0	1,30		13	37,53
1	8,00		14	41,87
2	13,01		15	41,59
3	17,96		16	42,12
4	21,87		17	41,63
5	24,59		18	42,00
6	27,31		19	40,39
7	32,43		20	43,54
8	34,55		21	43,77
9	35,55		22	44,94
10	35,38		23	41,18
11	39,12		24	41,31
12	36,70			

Gráficamente, todo crecimiento poblacional se describe, en primera instancia, bajo una función exponencial hasta llegar a un punto donde factores internos y externos afectan el crecimiento provocando en el gráfico un punto llamado de inflexión y posteriormente haciendo el crecimiento

más lento hasta llegar a una estabilidad. Es decir, el crecimiento poblacional queda representado por una combinación de un gráfico de una curva exponencial (modelo exponencial) y una curva sigmoidea o en forma de S (Ulloa y Rodríguez, 2013).

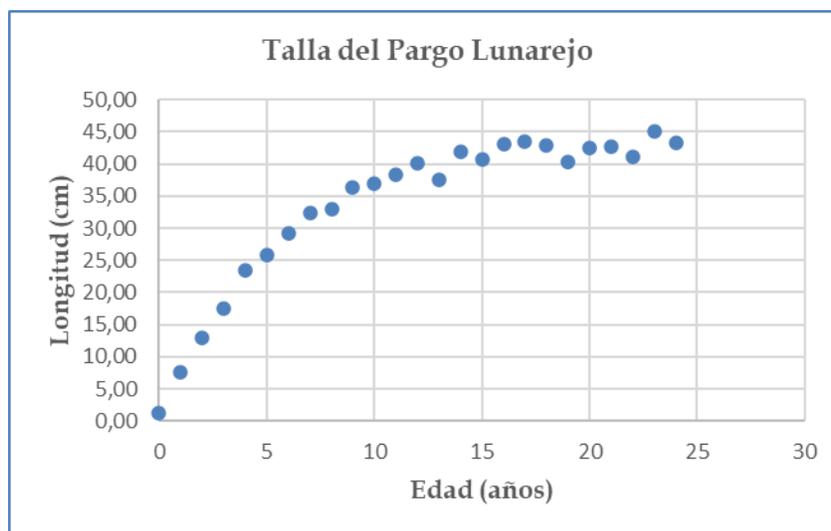


Figura 4. Crecimiento del pargo lunarejo

Dentro de los modelos no lineales destacan los denominados “Sigmoideales” entre los que se encuentran los siguientes: Brody (Brody, 1945), Von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957), Richards (Richards, 1959), Logística (Verhulst, 1838, 1961) y Gompertz (Gompertz 1825).

La figura 4 muestra la tendencia del crecimiento del pargo lunarejo durante 24 años, teniendo asociarse algún modelo, por lo que para este trabajo se determinó cuál es el que mejor ajusta esos datos se probaron los modelos: Logístico, Gompertz, Brody, Von Bertalanffy y Richards

La función o curva logísticas es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales. Con la función logística se pueden modelar entre otros:

- Crecimiento poblacional en un ambiente con recursos limitados.
- Ventas de un producto donde el total de venta tiene límite.
- Tiempo de respuesta a medicamentos en pacientes.
- La población de animales en una isla.
- El número de bacterias en una caja de Petri

El modelo de Gompertz ha demostrado que describe mejor el crecimiento absoluto de muchas especies acuáticas (Katsanevakis 2006) y es usado a menudo (Ricker 1975). Presenta una forma sigmoidea en su curva y asume un decremento exponencial de la tasa de crecimiento con relación a la edad (Katsanevakis y Maravelias 2008). El modelo es de tipo asintótico y presenta tres parámetros en su ecuación.

El modelo de Brody ha sido empleado previamente para describir el crecimiento de ganado ovino. (Gbangboche, A. et al., 2008). Al contrario de los modelos de Gompertz, von Bertalanffy y Logístico, el modelo de Brody no presenta un punto de inflexión. Una re - parametrización del modelo

El mCvB (von Bertalanffy 1938), que es el más usado en pesquerías (Arkhipkin y Roa-Ureta 2005), asume que las condiciones ambientales son constantes (Araya y Cubillos 2006). Sostiene que el crecimiento en peces está condicionado a procesos fisiológicos y que es el resultado neto de dos procesos opuestos, el catabolismo y anabolismo (von Bertalanffy 1938). La curva del modelo presenta una forma exponencial inversa, es de tipo asintótica y tiene tres parámetros en su ecuación

La curva o función logística generalizada, también conocida como curva de Richards, desarrollada originalmente para modelar el crecimiento, es una extensión de las funciones logísticas o sigmoideas, lo que permite curvas en forma de S más flexibles:

Metodología

El trabajo se desarrolla bajo un enfoque cuantitativo y se utilizaron los datos numéricos obtenidos de observaciones de pargo lunarejo y a partir de ellos se hicieron los análisis matemáticos para hacer la comparación entre los modelos citados.

La razón de utilizar Excel como herramienta para el análisis de los datos y la determinación del modelo que mejor los ajuste es por su uso extendido y se encuentra instalado en equipos de distintas generaciones desde computadoras relativamente antiguas hasta modernos dispositivos personales. Su invariabilidad de uso y técnicas para la captura y procesamiento de datos que no requiere una capacitación-preparación demasiado extensa. Además, se cuenta con un soporte en línea y en medios impresos suficientemente robusto.

Esta herramienta permite ajustar datos a cualquier función lineal o no lineal, estimando los parámetros de la función para un criterio de optimalidad (suma de los mínimos cuadrados). Muy simple de uso y potente, esta función de XLSTAT hace de Excel una herramienta de muy buena para la modelación.

El análisis que se realizó está basado en el uso del Excel en donde se utilizó el Solver mediante el método descrito por Ulloa, et. al. 2008, lo que se reforzó con un análisis residual. Para ello una vez determinado el modelo, esto es la ecuación que mejor representa a los datos se determinan los residuales entre el valor de la variable dependiente calculado y el valor real, luego se elabora una gráfica. Una gráfica residual es un tipo de gráfica que muestra los valores ajustados contra los valores residuales para un modelo de regresión. Este tipo de gráfico se usa a menudo para evaluar si un modelo de regresión es apropiado para un conjunto de datos dado y para verificar la heterocedasticidad de los residuos. Si los residuos están distribuidos aproximadamente uniformemente alrededor de cero en la gráfica sin un patrón claro, entonces normalmente decimos que se cumple el supuesto de homocedasticidad.

Se realizaron los ajustes a cada uno de los cinco modelos propuestos:

Tabla 2. Modelos utilizados

Modelo Logístico	$y = \frac{K}{1 + A * e^{-Bx}}$
Modelo de Gompertz	$y = K * e^{-A * e^{-Bx}}$
Modelo de Brody	$y = K - A * e^{-Bx}$
Modelo de Von Bertalanffy	$y = K * (1 - e^{-A(x-B)})^3$
Modelo de Richards	$y = A(1 + B * e^{-kt})^{\frac{1}{1-M}}$

Resultados

Se presentan los gráficos para cada uno de los modelos propuestos en los que se observan los datos del

problema (puntos en azul) y el ajuste realizado (puntos en color naranja):

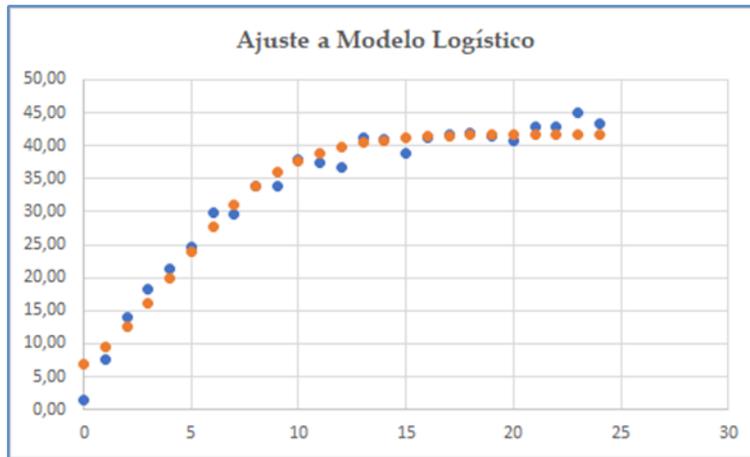


Figura 5. Ajuste de los datos al modelo Logístico

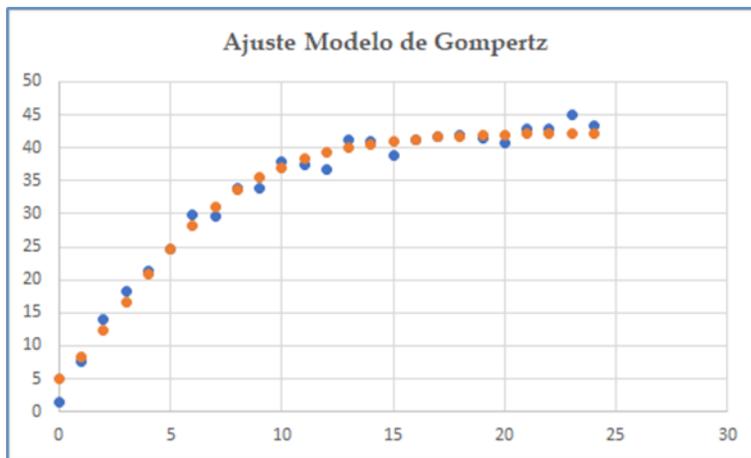


Figura 6. Ajuste de los datos al modelo de Gompertz

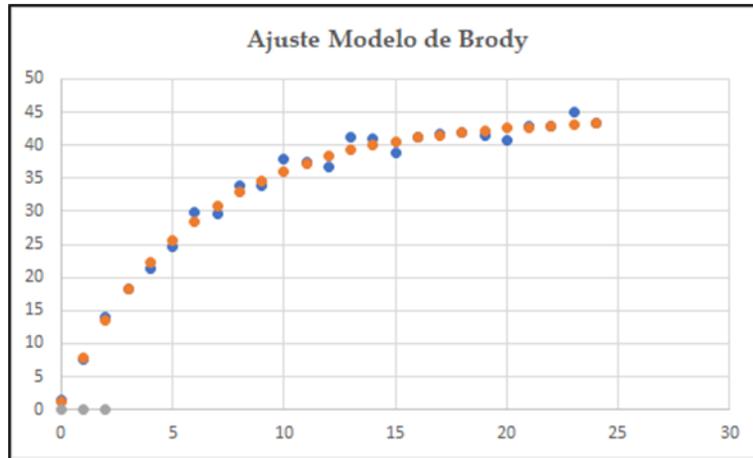


Figura 7. Ajuste de los datos al modelo de Brody

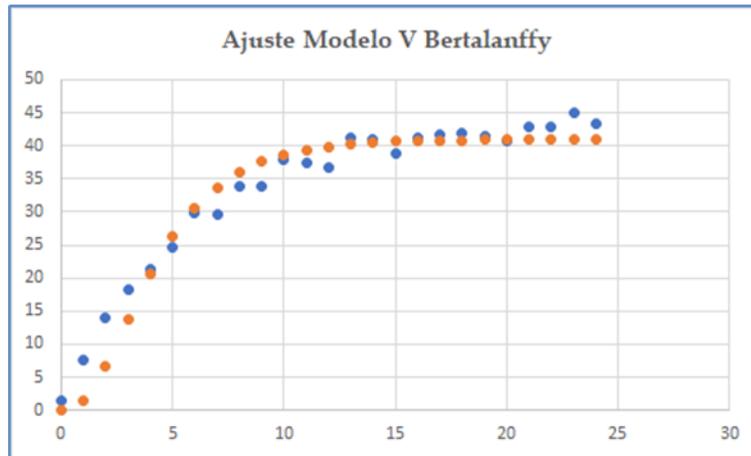


Figura 8. Ajuste de los datos al modelo de Von Bertalanffy

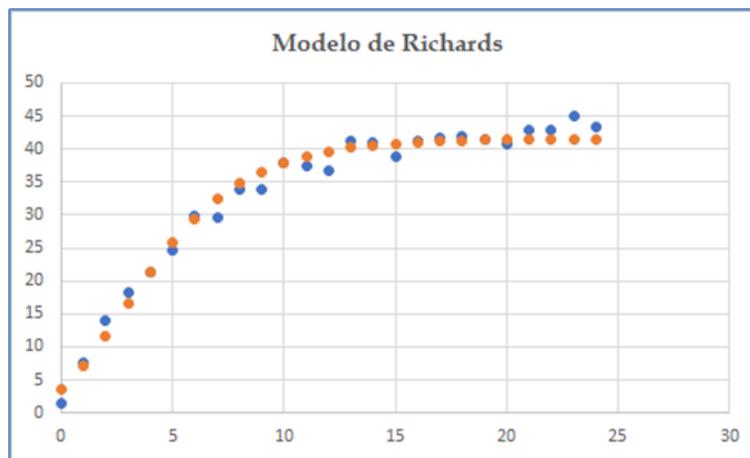


Figura 9. Ajuste de los datos al modelo de Richards

Los **modelos obtenidos** se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3. Modelos obtenidos

Modelo Logístico	$y = \frac{K}{1 + A * e^{-Bx}}$	$y = \frac{41.8009}{1 + 5.0765 * e^{-3641x}}$
Modelo de Gompertz	$y = K * e^{-A * e^{-Bx}}$	$y = 42.407 * e^{-2.148 * e^{-0.2768x}}$
Modelo de Brody	$y = K - A * e^{-Bx}$	$y = 43.997 - 42.789 * e^{-0.168x}$
Modelo de Von Bertalanffy	$y = K * (1 - e^{-A(x-B)})^3$	$y = 40.962 * (1 - e^{-0.395(x)})^3$
Modelo de Richards	$y = A(1 + B * e^{-kt})^{\frac{1}{1-M}}$	$y = 41.6(1 + 0.05 * e^{-0.33t})^{\frac{1}{1-1.02}}$

A continuación, se presentan los gráficos de los residuales:

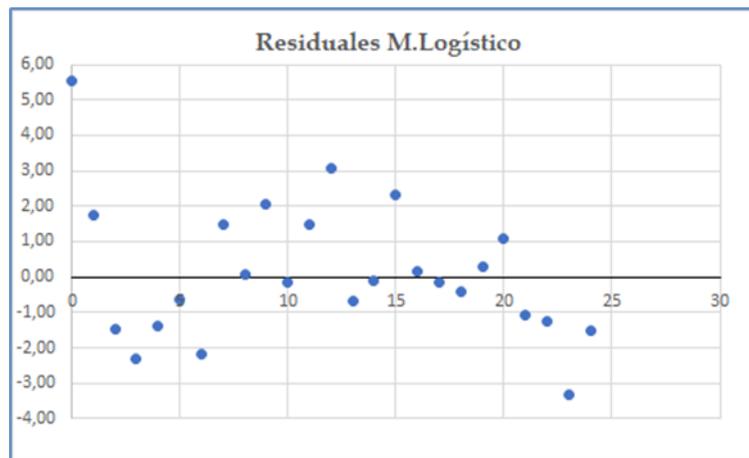


Figura 10. Residuales en el modelo Logístico

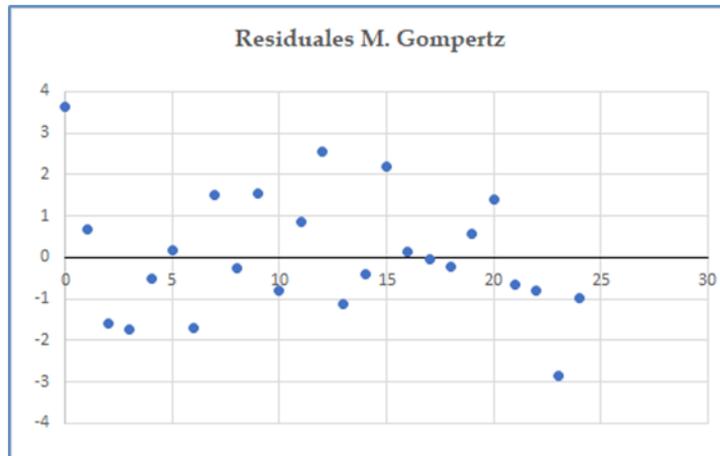


Figura 11. Residuales en el modelo de Gompertz

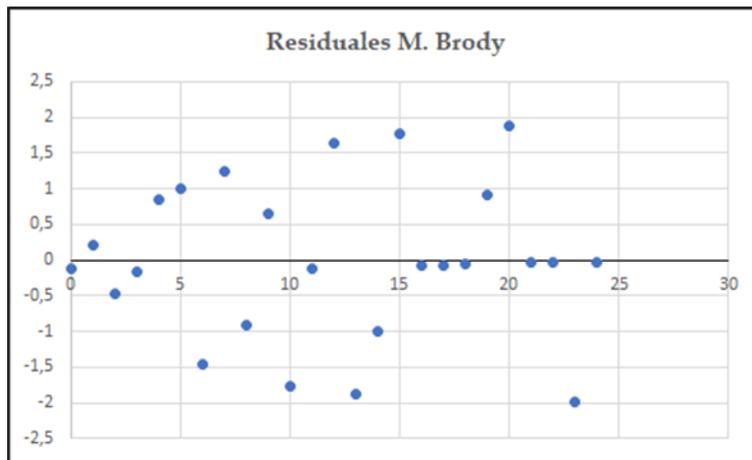


Figura 12. Residuales en el modelo de Brody

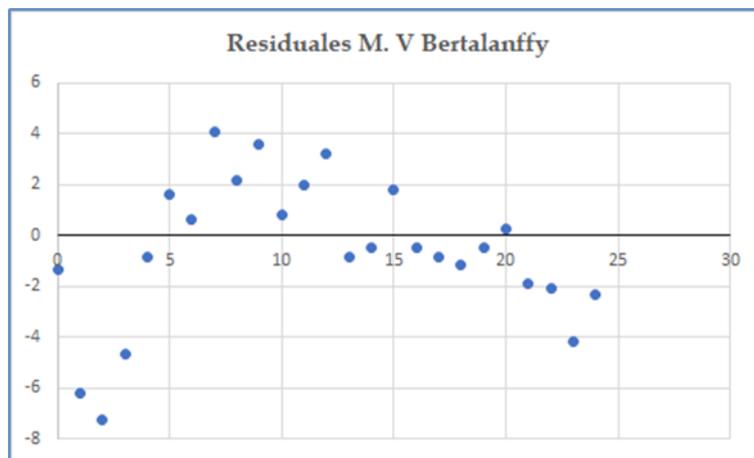


Figura 13. Residuales en el modelo de Von Bertalanffy

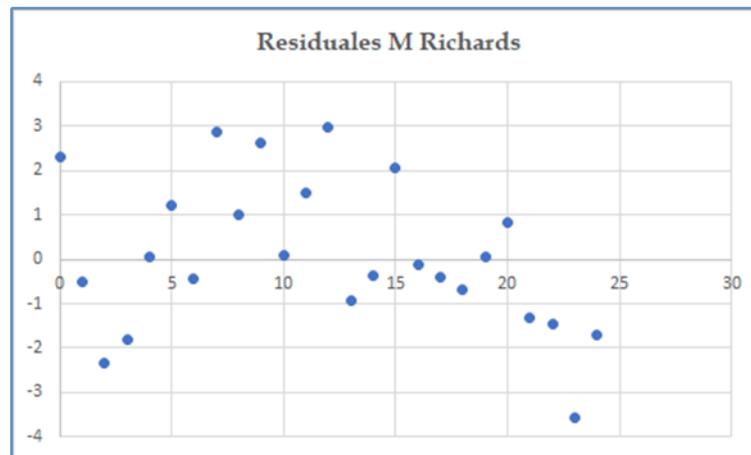


Figura 14. Residuales en el modelo de Richards

Para dar respuesta a la interrogante planteada de cuál es el modelo que mejor ajusta a los datos, las gráficas de ajuste proporcionan una visión y que sin embargo son los gráficos residuales los que permiten tomar la decisión acertada, lo que en este caso es el modelo de Brody, ya que en el modelo de:

Logarítmico los residuales varían entre 5.55 y -3.34, la mayor parte de los residuales se encuentran en una franja entre -3 y 3. Gompertz los residuales van de 3.61 a - 2.858. Brody los residuales extremos están entre -1.89 y -2.858 encontrando una mayor compactación de entre ellos, es decir los residuos están distribuidos de manera más uniforme alrededor del cero en la gráfica. En el modelo de Von Bertalanffy los residuales van de 4.1 a -7.2, mientras que en el de Richards los valores extremos son 2.96 y -3.56

Discusión

Para determinar cuál es el mejor modelo con base en los residuales se deben evaluar con base en lo que se conoce como RSS. Una vez que producimos una curva de regresión ajustada, podemos calcular la suma de cuadrados de los residuos (RSS), que es la suma de todos los residuos al cuadrado. Cuanto menor sea el RSS, mejor se ajustará el modelo de

regresión a los datos, en la tabla 4 se presenta un resumen de este cálculo.

El modelo más comúnmente conocido y sencillo es el lineal, donde esta relación entre la variable respuesta y predictora se explica mediante una línea recta, sin embargo, las relaciones entre variables no siempre serán lineales, es más, una relación lineal es difícil de conseguir en muchas ocasiones y puede presentar limitaciones en su capacidad predictiva, ya que la aproximación por linealidad puede llegar a ser muy simple para describir relaciones entre variables en el mundo real. Aquí es donde entran los modelos de regresión no lineales.

Un modelo de regresión no lineal es una ecuación que describe la relación no lineal entre la variable respuesta y la variable predictora cuando esta no puede ser formada adecuadamente mediante una relación lineal, es decir, se utilizan cuando los datos no se ajustan a la recta de mejor ajuste tanto como el investigador quisiera, entonces se debe de tomar otras opciones como una relación: logarítmica, exponencial, potencial, polinomial, entre muchas más.

Tabla 4.4. Valores de RSS para cada modelo propuesto

	Modelo de ajuste	RSS
Modelo Logístico	$y = \frac{41.8009}{1 + 5.0765 * e^{-3641x}}$	89.99
Modelo de Gompertz	$y = 42.407 * e^{-2.148 * e^{-0.2768x}}$	53.7253
Modelo de Brody	$y = 43.997 - 42.789 * e^{-0.168x}$	28.99
Modelo de Von Bertalanffy	$y = 40.962 * (1 - e^{-0.395(x)})^3$	204.33
Modelo de Richards	$y = 41.6(1 + 0.05 * e^{-0.33x})^{\frac{1}{1-1.02}}$	69.0169

Las características principales de un modelo no lineal son:

1. La variable dependiente y las independientes deben de ser cuantitativas, ya que con variables cualitativas no se puede generar una relación.
2. Si existe una variable categórica se debe de usar variables Dummy, las cuales sustituirían las variables categóricas por los números 0 y 1.
3. Elegir el modelo no lineal correcto no es una tarea fácil, en muchos casos se llega al mejor modelo a prueba y error.
4. El efecto predictor sobre la respuesta llega a ser menos intuitivo que el de un modelo no lineal, es decir no es tan fácil reconocer qué comportamiento va a tener los datos en un modelo no lineal.
5. Es de tener en cuenta que, en un modelo no lineal, la suma de los cuadrados del error residual se calcula diferente que en un modelo lineal, en un modelo no lineal es iterativo y se usan métodos como el de Gauss Newton y Levenberg Marquardt, (Carvajal, 2022).

El algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM) se utiliza para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales. Este método de ajuste de curvas es una combinación de otros dos métodos: el descenso de gradiente y el Gauss-Newton.

Tanto el método de Descenso de Gradiente como el de Gauss-Newton son algoritmos iterativos, lo que significa que usan una serie de cálculos (basados en conjeturas para los valores de x) para encontrar una solución. El descenso del gradiente difiere en que, en cada iteración, la solución se actualiza eligiendo valores que hacen que el valor de la función sea más pequeño. Más específicamente, la suma de los errores al cuadrado se reduce moviéndose hacia la dirección del descenso más empinado. En cada iteración, el algoritmo de Levenberg-Marquardt elige el descenso de gradiente o GN y actualiza la solución.

En estadística e inteligencia artificial, la suma residual de cuadrados (RSS), también conocida como suma de residuos cuadrados (SSR) o suma de cuadrados de estimación de errores (SSE), es la suma de los cuadrados de residuos (desviaciones predichas a partir de valores empíricos reales). de datos). De acuerdo con lo anterior el método que representa los datos es el Modelo de Brody

Conclusiones

A pesar de la utilidad que pueden tener los modelos en la predicción, la propuesta de los mismo debe realizarse utilizando de manera correcta las

diferentes metodologías y algo que se importante es que los modelos no son únicos ni para una región, ni para una especie.

La modelación es una actividad propia de muchas comunidades de prácticas entre ellas la comunidad en la que se realiza el estudio y se pone de manifiesto el estudio de las matemáticas y en su caso la utilización correcta de calculadoras o softwares adecuados, lo que en la experiencia del grupo sólo es recomendable para profesionistas en ejercicio y no para estudiantes, ya que éstos deben aprender el significado no sólo de los fenómenos, sino relacionarlos con los parámetros de los modelos para analizar su significado e influencia.

Referencias Bibliográficas

- Arkipkin, A.; Roa-Ureta, R. (2005). Marine and Freshwater Research 56(4) 371-386 <https://doi.org/10.1071/MF04274>
Submitted: 20 November 2004 Accepted: 1 April 2005 Published: 27 June 2005
- Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Arrieta, J.; Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 1.
- Bertalanffy, L.V. 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. Quart. Rev. Biol. , 32: 217-230.
- Brody, S. (1945). Bioenergetics and growth. Reinhold Publication. New York. 1023 p
- Carvajal, L. (2020). Modelos no lineales. Modelo de regresión polinomial y por segmentos. Dabia
- Cifuentes, J.; Torres, P.; Frías, M. (1995). El océano y sus recursos III. Las Ciencia del Mar: Oceanografía, Física, Matemáticas e Ingeniería. Fondo de Cultura Económica. México
- Creswell, J.W. (2003). Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. Editorial Sage, 2a Ed.
- Euler, L. (1758) "Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent", Histoire del 'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, année MDCCLVI, 165-234
- Gbangboche, A.; Glele, R.; Salifou, S.; Albuquerque, L.; Leroy, P. (2008) Comparison of non-linear growth models to describe the growth curve in West African Dwarf sheep. Animal (2008), 2:7, pp 1003-1012
- Gompertz B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new model of determining life contingencies. Phil. Trans. R. Soc. 115, 513-585
- KatsanevaKis S. 2006. Modelling fish growth: model selection, multi-model inference and model selection uncertainty. Fisheries Research 81: 229- 235
- KatsanevaKis S and CD Maravelias. 2008. Modelling fish growth: multi-model inference as a better alternative to a priori using von Bertalanffy equation. Fish and Fisheries 9: 178-187
- Ladino Martínez, L. (2012). Modelos de dinámica de poblaciones migratorias con factores de reclutamiento, depredación y captura. Universidad de Castilla - La Mancha, pág. 159.
- Lotka, A. (1925). Elements of physicalbiology, Baltimore, Williams &Wilkins, Revisado en Elements of mathematicalbiology, New York, Dover, 1956
- Malthus, T. ([1798] 1970). Primer ensayo sobre la población. Madrid: Alianza Editorial
- Parra, E., Gordillo, W., & Pinzón, W. (2019). Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza Aprendizaje desde las Ecuaciones Recursivas. Formación Universitaria, Vol. 12(1)(25-34 (2019)), 10.
- Richards, F.J. (1959). A flexible growth functions for empirical use. J. Exp. Bot. , 10: 290 -300
- Ricker, W. (1975). Computation and interpretation of biological statistics of fish population. Bull Fish Res Bd Can; 191:82.
- San Cristóbal, M. (2004). Metodologías para el análisis económico del sector pesquero: Una aplicación a Cantabria. Universidad de Cantabria - Departamento de Ciencias y Técnicas de la Navegación y de la Construcción Naval, pág. 350.

- Ulloa, J., Arrieta, J. (2012). La deconstrucción como diseño didáctico para la modelación. En Flores, R (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25 (pp. 889 - 895). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.
- Ulloa Ibarra, J., Arrieta Vera, J., & Espino Flores, G. (2013). El Modelo Logístico y su deconstrucción. Universidad Autónoma de Nayarit - Universidad Autónoma de Guerrero, págs. 717-724.
- Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2013). La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. *Revista Electrónica de Veterinaria*, Vol. 14, Núm. 02.
- Ulloa, J., Rodríguez, J., Arrieta, J. (2017). Los modelos sigmoidales y su impacto en la educación pesquera. *Acta Pesquera*. 3(5), 43 - 55. <http://cimateuan.education/revistav2/index.php/AP/issue/view/6>
- Ulloa, J.; Benítez, A.; Rodríguez, G. (2008). Modelos alométricos e isométricos en mojarra y lobina con apoyo de tecnología. *Acta Pesquera* Vol. 1, No. 1
- Verhulst, P. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.* 10 , 113-121.

