Uso de métodos numéricos para linealizar el modelo de Brody

Using numerical methods to linearize the Brody model

Ulloa Ibarra José Trinidad[1], Nidia D. Uribe Olivares[2], Juan Felipe Flores Robles[3], María Inés Ortega Arcega[1]

1 Universidad Autónoma de Nayarit. México
2 CBTis 100
3 Universidad Univer Nayarit

Recibido: 26 de octubre de 2022
Aprobado: 20 de diciembre de 2022

Resumen:
Las curvas del crecimiento reflejan la relación entre la edad del animal y el desarrollo propio del individuo para crecer y madurarse corporalmente. Se presenta un trabajo desarrollado por el cuerpo académico de matemática educativa donde se propone un modelo para el crecimiento basado en el análisis numérico.

Palabras clave: métodos numéricos, modelos, linealización, modelo de brody
Abstract:

Keywords: numerical methods, models, linearization, brody model

Introducción:
Continuando con la línea de investigación que pretende explicar la relación entre las prácticas sociales y la construcción del conocimiento (Arrieta, 2003), y abordando la línea que sostiene que los conocimientos emergen de las prácticas de las comunidades (en nuestro caso, la comunidad de biólogos e ingenieros pesqueros). Ulloa y Arrieta, 2008, dan cuenta de la modelación en el aula y marcan la separación de los conocimientos entre la modelación escolar y las prácticas de las comunidades y en consecuencia de las intencionalidades. No obstante, se pretende con este trabajo linealizar un modelo no lineal y por el otro mostrar como el análisis numérico como herramienta de mucha utilidad para estudiantes y profesionistas que no posean un acervo matemático que incluya a las ecuaciones diferenciales.

El crecimiento es el proceso de incremento o desarrollo progresivo de un organismo. Aunque en la actualidad es un proceso muy complejo, se puede medir el crecimiento por el cambio en longitud o peso de un pez individual o un grupo de peces entre dos tiempos de muestreo. El crecimiento de una población puede referirse al cambio en el número de peces observado a diferentes tiempos (Everhart y Youngs, 1981; Granado, 2002).

Los peces presentan las siguientes características:
1) Los peces no cesan de crecer, sino que su tasa de crecimiento disminuye hasta hacerse asintótica, donde presenta incrementos mínimos con relación al tiempo, por lo cual se considera como crecimiento ilimitado.
2) El crecimiento de los peces se representa mediante una curva de carácter sigmoideo, en su primera fase es exponencial y en la segunda fase se vuelve asintótica (Gulland, 1971; Royce, 1972).

El crecimiento de casi todos los recursos acuáticos es asintótico, esto es, cada especie en cada ambiente tiene un tamaño característico el cual es obtenido por crecer a través de la vida. Este tipo de crecimiento es común para todos los vertebrados de sangre fría y en cualquier animal es acompañado e influenciado por muchos factores incluyendo los eventos endógenos (desarrollo del embrión, desarrollo, maduración y senilidad) y los cambios exógenos en su ambiente (Royce, 1972; Wootton, 1990).

Dentro de los modelos no lineales o asintóticos destacan los denominados “Sigmoidales” entre los que se encuentran los siguientes: Brody (Brody, 1945), Von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957), Richards (Richards, 1959), Logística (Verhulst, 1838) y Gompertz (Gompertz 1825). Una curva sigmoidea o curva en forma de S, (figura 1) representa una curva típica de crecimiento biológico, simboliza el crecimiento de los organismos en un ambiente nuevo y favorable.

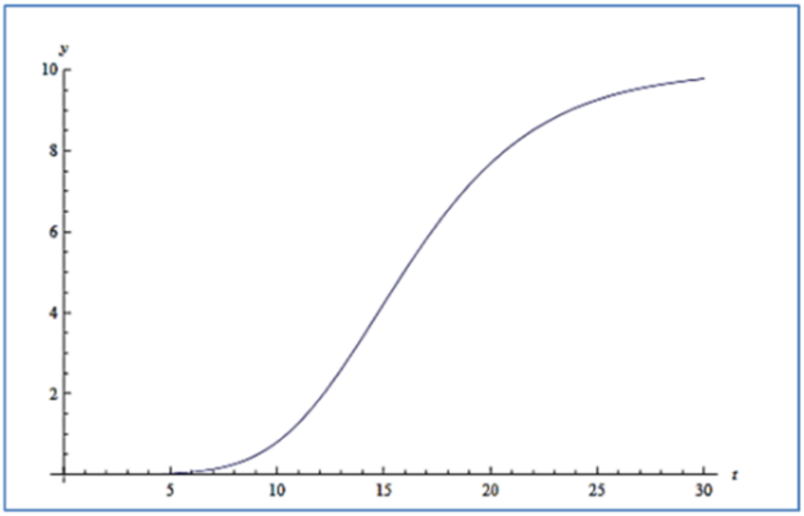

Figura 1. Curva de crecimiento sigmoidea (Ulloa et al, 2017)

La representación del crecimiento requiere de la utilización de diferentes modelos, la elaboración de estos requiere del dominio matemático del profesionista a cargo, sin embargo; como ya se ha citado en otros escritos, no todas las personas a cargo poseen un manejo adecuado de la resolución de sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, por ello se hace necesario el contar con alternativas para el desarrollo de los modelos (Ulloa, et al. 2017).

Dentro de los modelos no lineales destacan los denominados "Sigmoidales" entre los que se encuentran los siguientes: Brody (Brody, 1945), Von Bertalanffy (Bertalanffy, 1957), Richards (Richards, 1959), Logística (Verhulst, 1838) y Gompertz (Gompertz 1825).

El modelo de Brody ha sido empleado entre otros procedimientos para describir el crecimiento de ganado ovino. (Gbangboche, A. et al., 2008). Al contrario de los modelos de Gompertz, von Bertalanffy y Logístico, el modelo de Brody no presenta un punto de inflexión. Una re - parametrización del modelo.

En este trabajo se utilizarán los métodos numéricos para resolver la ecuación linealizada con base en los logaritmos, por lo que este es el objetivo principal.

Marco Teórico

Este trabajo toma como base teórica a la Socioepistemología dado que el estudio que se realizó considera a comunidades de práctica en el caso en particular los profesionales de la pesca que desarrollan las actividades como el aspecto preponderante para entender un fenómeno y que en esto se genera un conocimiento y que además considera aspectos socioculturales ligados a la producción y difusión de conocimiento entre ellos el matemático, así como los aspectos que atañen a los procesos de cognición, de naturaleza didáctica y construcción de dicho conocimiento (Cordero, 2005). En esta teoría se parte del supuesto de que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento, para con ello poder modelar la práctica que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Cordero, 2001).

Sin embargo, en la teoría Socioepistemológica se considera que para el análisis de las formas de construcción o producción de conocimiento matemático el énfasis esté, más que en los objetos matemáticos, en los contextos o prácticas donde se emerge o se desarrolla dicho conocimiento en una actividad humana.

El objetivo de investigación

La presente investigación se sitúa en estudiar, analizar y proponer una forma de trabajar analíticamente un modelo de crecimiento y como llegar a ellos mediante el uso de la tecnología sin ser ésta la única alternativa.

La interrogante que guía la presente investigación es: ¿Cómo se trabaja el modelo de crecimiento mediante métodos numéricos y que alternativas pueden ser accesibles a los estudiantes y profesionistas del área de la pesca y la acuicultura?

Metodología

Las actividades de modelación se distinguen de quienes la usan con la finalidad de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de esta. Se reproducen y analizan prácticas de modelizado con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula (Ulloa, *et al.* 2015).

La perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas bien en los modelos numéricos, bien en modelos gráficos o analíticos (Arrieta y Díaz, 2014)

El trabajo se desarrolla bajo un enfoque cuantitativo y se utilizaron los datos numéricos obtenidos de observaciones de huachinango y a partir de ellos se realizó la linealización del modelo de Brody y posteriormente se hace uso de los análisis numéricos para hacer la propuesta de un modelo que ajuste de buena manera los datos

Linealización de modelos no lineales.

La linealización es una técnica para calcular una aproximación lineal de una ecuación no lineal en un punto dado. Métodos que permiten linealizar algunos modelos son:

- El uso de logaritmos y sus propiedades
- Cambio de variables

A muchos profesionistas la utilización de funciones lineales les facilita bastante el trabajo que deben realizar para el manejo de datos y su representación por medio de modelos matemáticos, sin embargo; en muchos de los casos se requiere modelar datos que se representan por otro tipo de funciones distintas a las lineales. Muchos de los trabajos desarrollados utilizan como base al modelo lineal y mediante diferentes técnicas se ha logrado "linealizar" modelos cuadráticos, exponenciales y de otro tipo.

Una de las técnicas que utilizaban hasta antes de que la computadora se hiciera presente, los profesionales de la pesca utilizaban hojas de papel log – log y/o semilog según fuera la necesidad (figuras No.1 y No. 2. Estas hojas se comercializaban en algunas papelerías y con ellos se lograba transforma una curva en línea recta. Este procedimiento predomino durante muchos años y tiene como fundamento el que las funciones lineales son matemáticamente fáciles y tiene la ventaja de que pueden interpretarse gráficamente sin ningún problema.

El papel logarítmico es un papel que se usa para trazar algunas funciones. Ambos ejes de coordenadas son logarítmicos. El papel semi logarítmico es un papel que también se usa para trazar algunas funciones, pero en el que un eje de coordenadas es logarítmico y el otro es lineal.

Una explicación del porque se privilegiaban las funciones lineales es que son matemáticamente fáciles y además tienen la ventaja de que pueden interpretarse gráficamente sin ningún problema. Pero, muchas de las relaciones funcionales que se observan en biología pesquera no son lineales. Afortunadamente, estas funciones no lineales pueden transformarse a menudo en funciones lineales (Sparre y Venema, 1997), lo que significa que pueden tratarse de la forma descrita en las secciones precedentes. A continuación, se ofrecen varios ejemplos de la aplicación de las transformaciones de funciones no lineales en funciones lineales en biología pesquera.

Como ya se citó, se utilizaron los datos numéricos obtenidos de observaciones de Huachinango en el litoral del Pacífico mexicano y a partir de ellos se procedió a trabajar para hacer una propuesta de modelo con base en la ecuación de Brody, procediéndose primeramente a su linealización y posteriormente aplicando el análisis numérico requerido para tener un modelo específico para la especie en estudio.

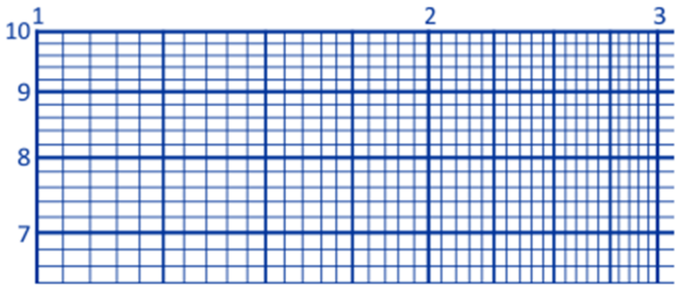

Figura 1. Hoja de papel logarítmico (log – log)

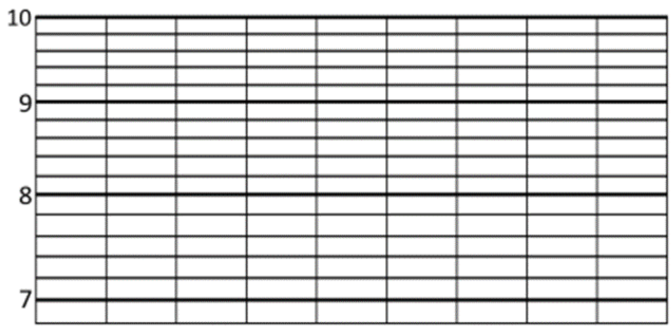

Figura 2. Hoja de papel semilogarítimico

El análisis numérico es una vía de solución alterna que permite conectar la teoría y la práctica al nivel que se quiera de medición y cálculo, pero en una forma diferente a como normalmente se enseña la operación analítica de los conceptos.

Se procede a la graficación de los datos utilizando ya se la hoja de cálculo de Excel o cualquier otro gráfico con la finalidad de caracterizar el modelo que represente de la mejor manera a lo observado, posteriormente se propone la linealización de los modelos y se realiza el procedimiento analítico para obtener el modelo.

Datos:

Edad (años)	Longitud Total (cm)
0	19
1	23
2	30
3	35
4	40
5	48
6	53
7	59
8	62
9	65
10	70
11	72
12	74
13	77
14	80
15	81
16	82

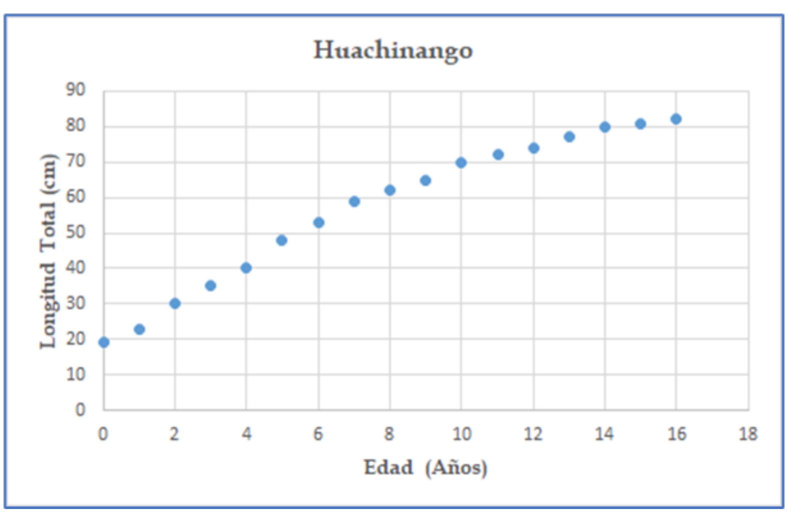

Fig. 3. Huachinango del Pacífico

Como puede apreciarse en el gráfico se aprecia un modelo sigmoidal que representa a los datos de manera gráfica por lo que con su análisis podemos hacer inferencias.

Dada la situación anterior se procedió a linealizar el modelo sigmoidal para poder establecer el que mejor los represente, con base en el procedimiento descrito por Quintana, Villalobos y Cornejo (2005) y adaptado por Ulloa, Nieto, Ortega, Flores y Arrieta (2019).

El modelo sigmoidal, en este caso el modelo de Brody se representa mediante:

$$\boldsymbol{y_i = K\left(1 - A * e^{-Bt}\right)}$$

Donde:
y_i representa el i-ésimo peso del animal en el i-ésimo tiempo ti;
K, es la longitud asintótica cuando tiende a infinito;
A es un parámetro de ajuste cuando y ≠ 0 ó t ≠ 0;
B es un índice de madurez expresado como una proporción de porcentaje del máximo crecimiento con respecto al peso adulto del animal.

El procedimiento de linealización se basó en las propiedades de los logaritmos, en este ejercicio se utilizaron los logaritmos naturales dado que la ecuación que representa la modelo de Brody contiene a la constante "e" que es la base para el tipo de logaritmos, llegándose a:

$$Ln\left(\frac{K}{K-y}\right) = Bt - Ln\ A$$

Por comparación con la ecuación

$$\mathrm{Ln}\, y = \mathrm{Ln}\, a_0 + a_1 x$$

$$y = \left(\frac{K}{K-y}\right), \quad B = a_1, \ A = a_0$$

$$\mathrm{Ln}\, y = \mathrm{Ln}\, a_0 + a_1 x$$

Esta ecuación representa la ecuación de una línea recta en la que la pendiente es a_1 y la ordenada al origen es Ln a_0

Al aplicar el método de mínimos cuadrados, se obtienen las siguientes ecuaciones para calcular la pendiente y la ordenada al origen. Para la pendiente

$$a_1 = \frac{n\sum(\mathrm{Ln}\, x_i)(\mathrm{Ln}\, y_i) - \sum \mathrm{Ln} x_i \sum \mathrm{Ln}(y_i)}{n\sum(\mathrm{Ln}\, x_i)^2 - (\sum \mathrm{Ln}\, x_i)^2}$$

Para la ordenada al origen

$$\mathrm{Ln}(a_0) = \overline{\mathrm{Ln}(y)} - a_i\overline{(\mathrm{Ln}\, x)}$$

Haciendo Y′ = Ln y, A′ = Ln a, Ln x = X′, B = b
Se tiene:
Y′ = A′ + B*X′

Con esto como base el coeficiente de correlación se obtiene de la siguiente manera:

$$r = \frac{n * (\sum X' * Y') - (\sum X')(\sum Y')}{\sqrt{(n * \sum X'^2 - (\sum X')^2)(n * \sum Y'^2 - (\sum Y')^2)}}$$

Resultados y discusión:
En la tabla No. 2 se presentan la manera de realizar los cálculos a partir de los datos de la muestra obtenida durante todo el periodo de observación.

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{n\sum \log x_i * \log y_i - \sum \log x_i \sum \log y_i}{n\sum(\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2}}$$

$$\boldsymbol{Log\ a_0 = \overline{(Log\ y)} - a_1\overline{(Log\ x)}}$$

Una vez realizados los cálculos se llegan a los valores

a_1	0,84511
a_0	0,08701

Por lo que el modelo propuesto queda como:

$$\boldsymbol{y = 105.79\left(1 - 0.84511 * e^{-0.08701 * t}\right)}$$

Tabla 2. Datos para linealización del modelo de Brody.

Muestra	x	y	X'	Y'	X'Y'	X'^2	Y'^2
	Lt	Pt	Ln x	Ln y	Ln x * Ln y	(Ln x)^2	(Ln y)^2
1							

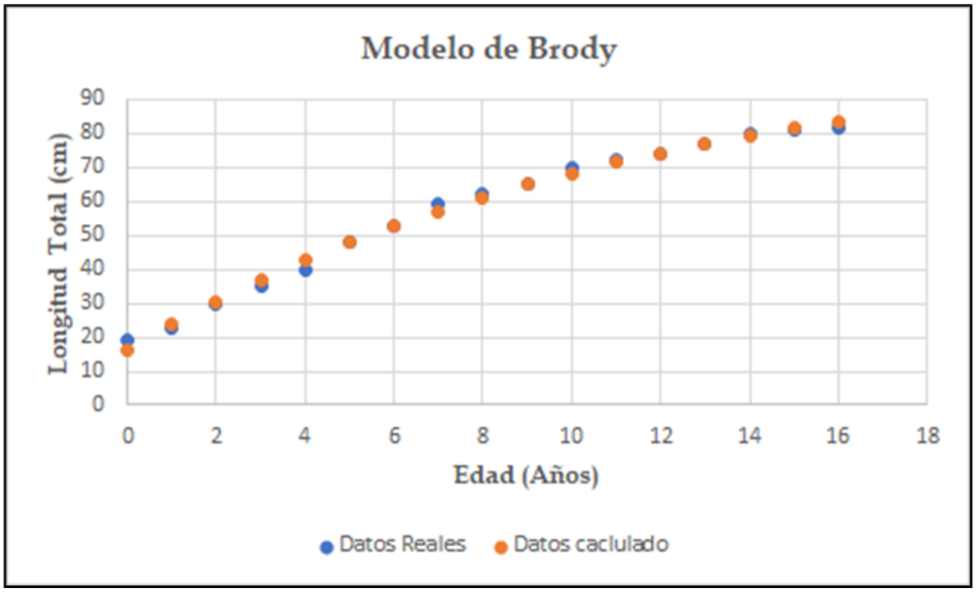

Figura 4. Comparación datos reales VS datos calculados con base en el modelo propuesto

$$Coeficiente\ de\ Correlación = r = \mathbf{0{,}9658}$$

Para llegar al modelo propuesto:

$$y = 105 * \left(1 - 0.84511 * e^{-0.08701 * t}\right)$$

Se realizó una proyección del crecimiento en este caso de la longitud, y se estimó que el valor de la asíntota de crecimiento puede ser de 105. Se reconoce que dependiendo de este valor el modelo puede cambiar ya que los valores de los parámetros calculados dependen en gran medida de es valor, no obstante, en el caso de que el valor fuera más bajo los cambios no son realmente significativos.

Conclusiones:

No se debe perder de vista que un modelo de regresión no lineal es una ecuación que describe la relación no lineal entre la variable respuesta y la variable predictora cuando esta no puede ser formada adecuadamente mediante una relación lineal, es decir, se utilizan cuando los datos no se ajustan a la recta de mejor ajuste tanto como el investigador quisiera, entonces se debe de tomar otras opciones como una relación: logarítmica, exponencial, potencial, polinomial, entre muchas más (Ulloa, et al 2022).

Conviene recordar también que a pesar de la utilidad que pueden tener los modelos en la predicción, la propuesta de los mismo debe realizarse utilizando de manera correcta las diferentes metodologías y algo que se importante es que los modelos no son únicos ni para una región, ni para una especie.

Bibliografía

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav -IPN

Arrieta, J.; Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) 18 (1): 19-48.

Bertalanffy, L.V. 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. Quart. Rev. Biol. , 32: 217-230.

Brody, S. (1945). Bioenergetics and growth. Reinhhold Publication. New York. 1023 p

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología através de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en MatemáticaEducativa 4 (2), 103-128

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático eneducación superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana deInvestigación en Matemática Educativa8 (3), 265-286.

Everhart, W.H. y Youngs, W.D. (1981). Principles of Fishery Science. Second Edition. Cornell University Press. 350 p.

Gbangboche, A.; Glele, R,; Salifou, S.; Albuquerque, L.; Leroy, P. (2008) Comparison of non -linear growth models to describe the growth curve in West African Dwarf sheep. Animal (2008), 2:7, pp 1003–1012

Gompertz B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new model of determining life contingencies. Phil. Trans. R. Soc. 115, 513–585

Granado, L.C. (2002). Ecología de peces. Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, España. 353 p.

Gulland, J.A. (1971). Manual de métodos para la evaluación de las poblaciones de peces. Editorial Acribia, Zaragoza. 193 p.

Richards, F.J. (1959). A flexible growth functions for empirical use. J. Exp. Bot. , 10: 290-300

Royce, F.W. (1972). Introduction to the Fishery Sciences. Academic Press: 252 p

Sparre, P. and Venema, S.C. (1997). Introducción a la Evaluación de Recursos Pesqueros Tropicales. Parte 1. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO)

Quintana, P., Villalobos, E. y Cornejo, M. C. (2005). Métodos numéricos con aplicaciones en Excel. Editorial Reverté. México.

Ulloa, J.; Uribe, N.; Flore, J.; Ortega, M. (2022). Comparación de cinco modelos de crecimiento para pargo lunarejo Lutjanus coeruleolineatus (Rüppell, 1838). Acta Pesquera No. 15, Vol. 8

Ulloa, J.: Nieto, J., Ortega, M.; Flores, J.; Arrieta, J. (2019). Regresión multilineal como apoyo a los análisis proximales. Acta Pesquera Vol. (5), No. 9. Universidad Autónoma de Nayarit

Ulloa, J.; Grijalva, F.; Arrieta, J.; Ortega, M. (2017).
Tratamiento del modelo de Richards. Acta Pesquera Vol, 3, No. 17, pp. 51 - 59

Ulloa, J.; Arrieta, J.; Benítez, A. (2015). Alternativas para la elaboración de modelos matemáticas. Acta Pesquera Vol 1, No. 1

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2008). Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 479 488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Verhulst, P. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Corresp. Math. Phys. 10 , 113–121.

Wootton, R.J. (1990). Ecology of Teleost Fishes. Chapman and Hall. Fish and Fisheries Series 1: 195 p

ENIP