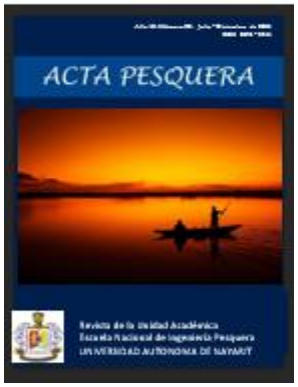

Revista ACTA PESQUERA.
Volumen 10 No. 20.
ISSN: 2395-8944
Periodo: Julio – Diciembre de 2024
San Blas, Nayarit. México
Pp. 45 - 63
Recibido: octubre 02 de 2024
Aprobado: diciembre 02 de 2024
DOI: 10.60113/ap.v10i20.143

Uso del análisis numérico para representar el Crecimiento de la Trucha Blanca (*Haemulon flaviguttatum* Gill,1863)

Using numerical analysis to represent the growth of the white trout (*Haemulon flaviguttatum* Gill,1863)

José Trinidad Ulloa Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit
jtulloa@uan.edu.mx
https://orcid.org/0000-0002-6382-7588

María Inés Ortega Arcega
UACBI - UAN
maria.arcega@uan.edu.mx
https://orcid.org/0000-0002-1058-8106

Bárbara Nayar Olvera Carballo
Universidad Autónoma de Nayarit
barbara.olvera@uan.edu.mx
https://orcid.org/0009-0001-3773-7570

Nidia D. Uribe Olivares
CBETIS 100
nidy98@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2525-4157

Juan Felipe Flores Robles
Universidad Autónoma de Nayarit
juan.f10res@hotmail.com
https://orcid.org/0009-0003-4183-7501

Uso del análisis numérico para representar el Crecimiento de la Trucha Blanca (*Haemulon flaviguttatum* Gill,1863)

Using numerical analysis to represent the growth of the white trout (*Haemulon flaviguttatum* Gill,1863)

Resumen
En el desarrollo del presente trabajo, se utilizó el análisis de ajuste de datos para seleccionar el modelo que mejor representa datos de la trucha blanca, comparando los modelos: Logístico, Brody y el de Saturación con la finalidad de lograr hacer una propuesta sobre el mejor de ellos. En biología pesquera, los modelos sigmoidales, también conocidos como modelos de crecimiento en forma de S, son herramientas matemáticas ampliamente utilizadas para representar el crecimiento de poblaciones de peces y otras especies acuáticas. Estos modelos se caracterizan por su forma en S, que refleja un crecimiento inicial lento, seguido de una aceleración hasta alcanzar un límite asintótico. Es importante destacar que estos modelos son simplificaciones de la realidad y no siempre representan todos los aspectos de la dinámica poblacional de una especie. Por lo tanto, es crucial utilizarlos con precaución y considerar otras fuentes de información al realizar inferencias sobre el estado de una población pesquera. Es importante evaluar las ventajas y desventajas de cada modelo antes de seleccionar el más apropiado. Su capacidad para modelar el crecimiento en longitud de peces de manera precisa lo ha convertido en una herramienta esencial para la evaluación de poblaciones y la gestión pesquera.

Palabras clave: análisis numérico, crecimiento, trucha blanca

Abstract
In the development of this work, data fitting analysis was used to select the model that best represents channel catfish data, comparing the Logistic, Brody and Saturation models to make a proposal on the best of them. In fisheries biology, sigmoidal models, also known as S-shaped growth models, are widely used mathematical tools to represent the growth of fish populations and other aquatic species. These models are characterized by their S-shape, which reflects a slow initial growth, followed by an acceleration until reaching an asymptotic limit. It is important to note that these models are simplifications of reality and do not always represent all aspects of the population dynamics of a species. Therefore, it is crucial to use them with caution and consider other sources of information when making inferences about the status of a fishery population. It is important to evaluate the advantages and disadvantages of each model before selecting the most appropriate one. Its ability to accurately model fish length growth has made it an essential tool for stock assessment and fisheries management.

Keywords: numerical analysis, growth, white trout

Introducción

Para explicar los fenómenos observados en las diferentes áreas, la ciencia desarrolla teorías y modelos, estos últimos los utiliza para crear conexiones, causas y explicaciones. (Cadima, 2003). En el caso del crecimiento individual, se aplican modelos matemáticos para dar cuenta de este aspecto a lo largo del ciclo vital de la especie. Los modelos de crecimiento de los grupos de población explotados describen con precisión las etapas de la vida en las que sufren la explotación, (Gulland, 1983). Las descripciones matemáticas del crecimiento se basan en supuestos biológicos para explicar este fenómeno en las especies (Ricker, 1979).

Con frecuencia es importante e incluso necesario analizar varios modelos o funciones de crecimiento para caracterizar adecuadamente este aspecto de una especie, (Calliet et al., 2006). Para ello se deben seleccionar modelos apropiados a la representación de la realidad biológica, con bases estadísticas en sus ajustes y confiabilidad (Moreau, 1987).

En biología pesquera, los modelos sigmoidales, también conocidos como modelos de crecimiento en forma de S, son herramientas matemáticas ampliamente utilizadas para representar el crecimiento de poblaciones de peces y otras especies acuáticas. Estos modelos se caracterizan por su forma en S, que refleja un crecimiento inicial lento, seguido de una aceleración hasta alcanzar un límite asintótico.

Ningún modelo Sigmoidal es indiscutiblemente "mejor" para todas las aplicaciones en biología pesquera. La elección de un modelo adecuado depende de las características específicas del caso de estudio (la especie estudiada) y de los objetivos del análisis. Antes de elegir el más adecuado, es importante evaluar las ventajas y desventajas de cada modelo. Sin embargo, el modelo de Bertalanffy es el modelo en forma de S más utilizado en biología pesquera debido a su simplicidad y flexibilidad. Su capacidad para simular con precisión el crecimiento de la longitud de los peces lo convierte en una herramienta importante para la evaluación de poblaciones y la gestión pesquera.

Es importante enfatizar que el modelo Sigmoidal es una simplificación de la realidad y no necesariamente representa todos los aspectos de la dinámica poblacional de una especie. Por lo tanto, es importante utilizar estos modelos con precaución y considerar otras fuentes de información al inferir el estado de las poblaciones de peces.

Se pueden realizar varios tipos de análisis comparativo para determinar las ventajas y desventajas de diferentes modelos sigmoideos. Estos incluyen: análisis de conciliación de datos; Análisis de parsimonia; Análisis de capacidad predictiva; Análisis de estabilidad; Análisis de interpretabilidad; Análisis de robustez.

Existen además otros métodos para seleccionar el modelo que mejor se aproxima de un grupo de modelos candidatos utilizando criterios de teoría de la información, (Burnham y Anderson, 2002). Este tipo de herramientas exploratorias son muy recientes en los estudios de pesquerías, donde han sido utilizados por menos de una década (Cruz-Vázquez et al., 2012).

La Matemática Aplicada en las ciencias agropecuarias y pesqueras permiten brindar criterios y herramientas básicas para manejar e interpretar cada vez mejor la actividad, satisfacer las demandas de nuevas tecnologías para producir en mercados globales altamente competitivos resguardando los recursos naturales y tomar decisiones a mediano y largo plazo en condiciones similares de experimentación (Ortega, 2000).

La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencia de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades (Ulloa y Arrieta, 2011). La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda. Se ha comentado también (Ulloa y Arrieta, 2011) que gran parte del conocimiento surge en las llamadas comunidades de práctica (Wenger, 1998a), en la figura 1 se muestra cómo surge este en la comunidad.

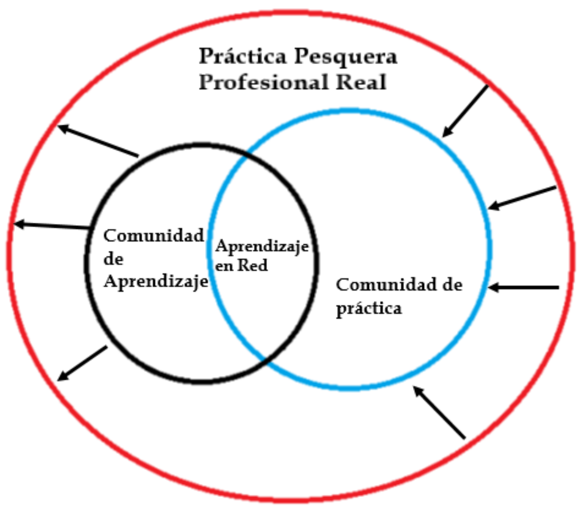

Figura1, Comunidades de práctica

Se ha propuesto el análisis de ajuste de datos para seleccionar el modelo que mejor representa datos del crecimiento de la Trucha Blanca, comparando los modelos: Logístico, Gompertz, Brody y el de Saturación con la finalidad de hacer una propuesta sobre el mejor de ellos.

Aspectos biológicos y ecológicos del recurso

Cuerpo oblongo, comprimido y bastante profundo (profundidad contenida 3,0 a 3,1 veces en la longitud estándar); boca grande, terminal y oblicua, su borde anterior ubicado al mismo nivel que el centro del ojo; primer arco branquial con 26 a 36 branquiespinas; aleta dorsal con muescas, con 10 a 12 espinas y 15 a 18 radios blandos; segunda espina anal más larga y fuerte que la tercera; serie de escamas por encima de la línea lateral oblicua; cuerpo marrón claro; cada escama tiene una mancha azul perlado, las manchas parecen formar líneas que siguen la serie de escamas; aletas amarillentas. Forma cardúmenes sobre fondos rocosos y arenosos. Se alimenta de noche

Es importante tener en cuenta que muchos organismos pasan por varias fases distintas de crecimiento durante su vida. Una variable de tamaño o peso medible a lo largo del tiempo puede servir para cuantificar esos patrones.

Un patrón sigmoideo se observa comúnmente en condiciones que son generalmente consistentes, y donde una variable aumenta sucesivamente exponencialmente, luego linealmente, y por último asintóticamente. Cuando se traza una curva en forma de S, o una función sigmoidea, se puede ver en la siguiente figura.

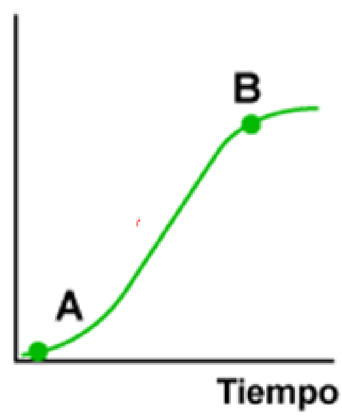

Figura No.2 Curva Sigmoidal

Se debe recordar que una curva sigmoidal consta de tres etapas: un período acelerado (etapa exponencial), un período de transición y un período de meseta.

El problema de investigación

Evaluar la capacidad de los modelos de crecimiento logístico, de Brody y de saturación para predecir el crecimiento de la trucha blanca (Oncorhynchus mykiss) en diferentes condiciones de temperatura en un sistema de cultivo intensivo, cuyos objetivos son:

- Ajustar los modelos de crecimiento a datos de crecimiento de truchas blancas criadas a diferentes etapas.
- Comparar el ajuste de los modelos y seleccionar el modelo que mejor se ajusta a los datos.

- Evaluar la capacidad predictiva de los modelos para estimar el peso final de las truchas a diferentes edades y temperaturas.
- Determinar la temperatura óptima de cultivo para maximizar el crecimiento de la trucha blanca.

Justificación

Los modelos matemáticos, como el logístico, de Brody y de saturación, son herramientas valiosas en la biología pesquera y la acuicultura. Estos modelos, al describir de manera simplificada pero efectiva el crecimiento de poblaciones, ofrecen una serie de ventajas para comprender y gestionar la dinámica de especies como la trucha blanca.

Como una ventaja de puede decir que la trucha blanca es una especie de gran importancia comercial y ecológica. Al modelar su crecimiento, podemos comprender mejor su ciclo de vida, identificar los factores que limitan su crecimiento y desarrollar estrategias para su conservación y aprovechamiento sostenible. Los modelos logísticos, de Brody y de saturación, al capturar diferentes aspectos del crecimiento (crecimiento inicial rápido, crecimiento asintótico, efecto de la densidad), son particularmente útiles para estudiar esta especie.

Como desventajas tenemos que estos modelos son simplificaciones de la realidad y no consideran todos los factores que pueden influir en el crecimiento de la trucha blanca, como las interacciones con otras especies, las enfermedades o la variabilidad ambiental; la precisión de las predicciones depende de la calidad y cantidad de datos disponibles.

Por otra parte, la modelación del crecimiento de la trucha blanca requiere un enfoque multidisciplinario que combine conocimientos de biología, ecología, matemáticas y estadística.

A continuación, se presentan las características más importantes de los modelos que se compararán para el desarrollo de este trabajo:

Modelo logístico:

El **modelo logístico** en las áreas de la pesca y la acuicultura biología pesquera es una herramienta fundamental para entender el crecimiento de poblaciones de peces en ambientes con recursos limitados. Este modelo se basa en la ecuación logística, que describe cómo la tasa de crecimiento de una población disminuye a medida que se acerca a la capacidad de carga del ambiente.

Entre sus características se encuentran las siguientes.

- **Crecimiento Sostenido**: A diferencia del crecimiento exponencial, donde la población puede crecer indefinidamente, el modelo logístico considera un límite máximo (capacidad de carga) que la población no puede superar debido a restricciones ambientales

- **Tasa de Crecimiento Variable**: La tasa de crecimiento per cápita es alta cuando la población es pequeña y disminuye a medida que la población se aproxima a la capacidad de carga. Esto se traduce en un crecimiento inicial rápido que se desacelera con el tiempo
- **Parámetros Clave**: El modelo incluye parámetros como la tasa intrínseca de crecimiento (r) y la capacidad de carga (K). La relación entre estos parámetros determina la forma de la curva de crecimiento
- **Aplicaciones en Manejo Pesquero**: Este modelo es útil para la gestión de recursos pesqueros, permitiendo predecir el impacto de la pesca sobre las poblaciones y ayudar en la toma de decisiones sobre cuotas de captura y conservación

La ecuación matemática del modelo logístico para el crecimiento de peces se expresa como:

$$L(t) = \frac{L\infty}{1 + e^{-k(t-t0)}}$$

Donde:

- **L(t)**: Longitud promedio de los peces en el tiempo "t".
- **L**∞: Longitud asintótica, que representa la longitud máxima promedio que pueden alcanzar los peces.
- **k**: Tasa de crecimiento relativa, que indica la velocidad a la que la población se acerca a su longitud asintótica.
- **t**: Tiempo, generalmente medido en días, meses o años.
- $\mathbf{t_0}$: Edad a la talla media ($L_0/2$), que representa el tiempo en el que la población alcanza la mitad de su longitud asintótica.

Interpretación de los parámetros:

- **L**∞: La longitud asintótica. ($L\infty$) es un parámetro fundamental del modelo, ya que representa el potencial máximo de crecimiento de la población. Esta longitud está determinada por factores genéticos y ambientales, como la disponibilidad de alimento, la temperatura del agua y la competencia.
- **k**: La tasa de crecimiento relativa (k) indica la rapidez con la que la población se acerca a su longitud asintótica. Un valor alto de k implica un crecimiento rápido en las primeras etapas, mientras que un valor bajo de k indica un crecimiento más lento y gradual.
- $\mathbf{t_0}$: La edad a la talla media (t_0) proporciona información sobre el patrón de crecimiento inicial de la población. Un valor bajo de t_0 indica un crecimiento rápido desde las primeras etapas, mientras que un valor alto de t_0 sugiere un crecimiento más lento al inicio y una aceleración posterior.

El modelo logístico es una herramienta fundamental en la gestión de recursos pesqueros y acuícolas. Su aplicación permite comprender la dinámica de las poblaciones, predecir rendimientos y diseñar estrategias de manejo sostenible.

Modelo de Brody

El modelo de Brody es una herramienta valiosa en la pesca y la acuicultura, pero es importante reconocer sus limitaciones y utilizarlo junto con otros modelos y datos para obtener una comprensión más completa de la dinámica de las poblaciones de peces y organismos acuáticos cultivados. La elección del modelo más adecuado dependerá de la especie en estudio, la disponibilidad de datos y los objetivos del análisis. La ecuación matemática del modelo de Brody para el crecimiento de peces se expresa como:

$$\boldsymbol{L(t) = L_0(e^{Kt})}$$

Donde:

- **L(t)**: Longitud promedio de los peces en el tiempo "t".
- **L_0**: Longitud inicial promedio, que representa la longitud promedio de los peces al inicio del estudio (t = 0).
- **k**: Tasa de crecimiento relativa, que indica la velocidad a la que la población crece en relación con su tamaño actual.
- **t**: Tiempo, generalmente medido en días, meses o años.

Interpretación de los parámetros:

- **L_0**: La longitud inicial promedio (L_0) proporciona información sobre el tamaño inicial de la población. Esta longitud es influenciada por factores como las condiciones ambientales durante el desarrollo temprano y las características reproductivas de la especie.
- **k**: La tasa de crecimiento relativa (k) indica la velocidad a la que la población crece en relación con su tamaño actual. Un valor alto de k implica un crecimiento rápido, especialmente en las primeras etapas, mientras que un valor bajo de k sugiere un crecimiento más lento.

Aplicaciones del modelo de Brody:
Estimación del crecimiento individual: Permite determinar la tasa de crecimiento de un organismo a lo largo de su vida, lo cual es fundamental para establecer edades de primera captura, determinar tallas comerciales y evaluar el impacto de diferentes factores ambientales en el crecimiento. Permite evaluar la sostenibilidad de una pesquería al comparar las tasas de crecimiento con las tasas de mortalidad por pesca.

El Modelo de Saturación
El modelo de saturación es una herramienta valiosa en la pesca y la acuicultura. Al comprender la dinámica de las poblaciones y predecir los efectos de diferentes acciones de manejo, se pueden tomar decisiones informadas para garantizar la sostenibilidad de estos recursos vitales.

De manera general se puede decir que el modelo de saturación es un modelo de crecimiento no lineal que se basa en la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = r * \left(\frac{x}{K}\right)^n}$$

donde:
x es el tamaño de la especie
t es el tiempo
r es la tasa de crecimiento intrínseca
K es la capacidad de carga del ecosistema
n es un parámetro que controla la forma de la curva de crecimiento

El modelo de saturación tiene las siguientes características:

- El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que la especie alcanza un tamaño máximo.
- El tamaño máximo de la especie es igual a la capacidad de carga del ecosistema.
- La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.
- El parámetro n controla la forma de la curva de crecimiento. Un valor de n menor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más pronunciada, mientras que un valor de n mayor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más suave.

El modelo de saturación tiene las siguientes suposiciones:

- El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que la población alcanza un tamaño máximo.
- El tamaño máximo de la población es igual a la capacidad de carga del ecosistema.
- La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.

Entre sus principales aplicaciones se tiene que:

- **Estimación de la Capacidad de Carga:**
  - Determina el número máximo de individuos de una especie que un ecosistema puede sostener a largo plazo.
  - Permite establecer límites de captura para evitar la sobreexplotación y el colapso de las poblaciones pesqueras, así como optimizar la densidad de cultivo en acuicultura.
- **Predicción de Rendimientos Pesqueros:**
  - Permite simular la evolución de una población pesquera bajo diferentes niveles de esfuerzo pesquero.
  - Ayuda a determinar el nivel de pesca que maximiza el rendimiento a largo plazo sin comprometer la sostenibilidad de la población.

La elección del modelo más adecuado dependerá de las características específicas del crecimiento de la especie de pez en estudio, la disponibilidad de datos y el ajuste empírico de los modelos a los datos observados. En algunos casos, puede ser necesario explorar modelos más complejos o combinar diferentes modelos para obtener una representación precisa del crecimiento.

Marco Teórico

Como se ha especificado en trabajos anteriores del grupo de modelación en Nayarit, se toma como base a la teoría Socioepistemológica como el marco ideal ya que se basa en el análisis de las prácticas de las comunidades ya sean de estudio, de práctica o profesionales considerando al grupo social en el que se desarrollan las actividades como el aspecto preponderante para entender la generación del conocimiento.

Esta teoría cuyo surgimiento fue en el área educativo, específicamente en el estudio de las prácticas sociales que influyen en las prácticas sociales y culturales ha sido adoptada en otras áreas, entre ella en las comunidades de profesionales, puede aplicarse en la biología pesquera y por lo tanto en la modelación, considerando los conocimientos empíricos que se utilizan para realizarla, pero tratando de encontrar un sustento científico formal para explicarlos.

Al aplicar la teoría de la socioepistemología a la modelación en biología pesquera, se busca construir modelos más inclusivos, contextualizados y sensibles a las realidades sociales y culturales de las comunidades pesqueras, lo que puede conducir a una gestión más sostenible y equitativa de los recursos pesqueros.

Metodología

Según Hernández, Fernández y Baptista (2014), este estudio es exploratorio, descriptivo y correlacional. El diseño del estudio es no experimental, ya que se utilizarán datos históricos de las zonas de desembarco, mientras que las variables no se modificarán, sino que se analizarán utilizando métodos y técnicas de estimación de parámetros poblacionales. La población de estudio es la especie "trucha blanca".

Se realizó un análisis numérico puesto que solo se requieren conocimientos básicos de la aritmética y del algebra, y además:

- El análisis numérico permite encontrar soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales no lineales.
- Esto permite estimar los parámetros de los modelos de crecimiento a partir de datos experimentales.
- Los datos experimentales pueden ser obtenidos de una variedad de fuentes.
- Una vez que se han estimado los parámetros de los modelos, se pueden utilizar para predecir el crecimiento futuro de la población.

En la primera etapa se toma cada uno de los modelos, se linealiza y se hacen los comparativos del original y del linealizado a fin de establecer analogías y con ello poder calcular el coeficiente de correlación.

La linealización de modelos sigmoidales es un enfoque utilizado para simplificar el análisis y la resolución de ecuaciones no lineales que describen el comportamiento de sistemas biológicos, químicos o físicos. Este método consiste en transformar la ecuación sigmoidal original en una expresión lineal aproximada mediante la aplicación de ciertas suposiciones y manipulaciones matemáticas, como se muestra en la figura 3, en la que una curva sigmoidal se transforma en una recta mediante la utilización de logaritmos.

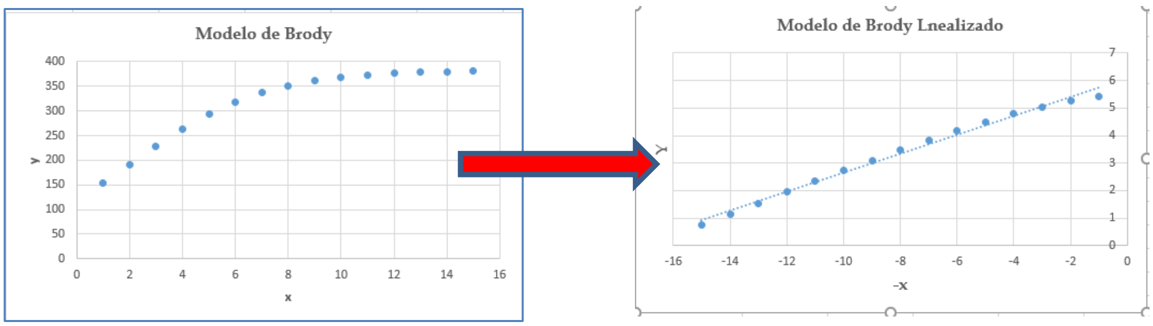

Figura No. 3. Linealización del modelo sigmoidal de Brody
Cambiando $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{Ln(K-y)}$
(Ulloa, et al, 2024)

Como ventajas de la linealización de curvas, podemos decir que las ecuaciones lineales son más fáciles de analizar tanto desde el aspecto analítico como del gráfico por ser expresiones más sencillas y manejables sobre todo en el caso de usuarios sin un adecuado manejo de las matemáticas.

Las desventajas son: la linealización implica una aproximación, lo que puede interpretarse principalmente como una representación no muy exacta del sistema original, lo que puede llevar a errores y a resultados imprecisos. En muchos casos el rango de validez de la ecuación lineal es válida son en un rango específico de las variables.

Como un obstáculo de importancia es el de que algunos modelos sigmoidales pueden tener formas matemáticas complejas, lo que dificulta la linealización, ejemplo de esto son los modelos que implican productos y/o cocientes; de igual manera se pueden tener modelos con varios parámetros desconocidos, lo que complica la linealización y la interpretación y/o estimación de estos a partir de la forma lineal. Incluso si se logra una linealización exitosa, puede ser difícil interpretar los resultados obtenidos a partir de la forma lineal en términos del modelo sigmoidal original y su significado físico o biológico.

Una herramienta de gran utilidad en la linealización de los modelos sigmoidales es el uso de los logaritmos, esto permite convertir la curva en la recta, mediante el siguiente procedimiento: Primeramente, identificar la ecuación sigmoidal, enseguida aplicar la transformación logarítmica, para ello se debe considerar la conveniencia de utilizar logaritmos naturales o decimales; realizar las operaciones algebraicas necesarias para aislar la variable independiente en un lado de la ecuación y seguir hasta llegar a una expresión lineal del tipo y = mx + b

Sin embargo, es importante tener en cuenta que la linealización mediante logaritmos tiene sus limitaciones. Sólo es válida en un rango específico de valores y puede introducir errores si se extrapola más allá de ese rango. Además, la transformación logarítmica puede no ser apropiada para ciertas formas funcionales o cuando se involucran valores negativos, como el caso de presentarse en la linealización del cálculo de logaritmos de cantidades negativas.

Ajuste de datos

Para realizar el análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico para representar el crecimiento, se pueden seguir los siguientes pasos:

- Se deben obtener los datos experimentales o de campo relacionados con el crecimiento de la población o el organismo de interés.
- Se debe seleccionar un modelo matemático apropiado para describir el patrón de crecimiento observado.
- Se deben estimar los parámetros del modelo seleccionado utilizando técnicas de análisis numérico. Esto implica minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo.
- Una vez obtenidos los parámetros estimados, se deben evaluar la bondad de ajuste y la precisión del modelo.
- Si es posible, se debe validar el modelo utilizando un conjunto de datos independiente. Esto implica aplicar el modelo con los parámetros estimados a un nuevo conjunto de datos y evaluar su capacidad predictiva.
- Finalmente, se deben interpretar los parámetros estimados del modelo en términos biológicos y evaluar su coherencia con el conocimiento existente sobre el crecimiento del organismo o población en estudio.

Resultados

Datos de crecimiento de la Trucha Blanca **(*Haemulon flaviguttatum* Gill,1863*)***

Tabla 1. Datos para obtención del modelo

Mes	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**…**	**…**	**…**	**…**
Longitud (cm)	3	4,1	5,1	7	8,7	10,6	…	…	…	…
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**8**	**8,5**	**…**	**…**	**10**
…	…	…	…	…	…	35	36,1	…	…	38,4
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**13,5**	**14**	**14,5**	**15**	
…	…	…	…	…	…	39,8	39,94	39,9	40	

Representación gráfica de los datos:

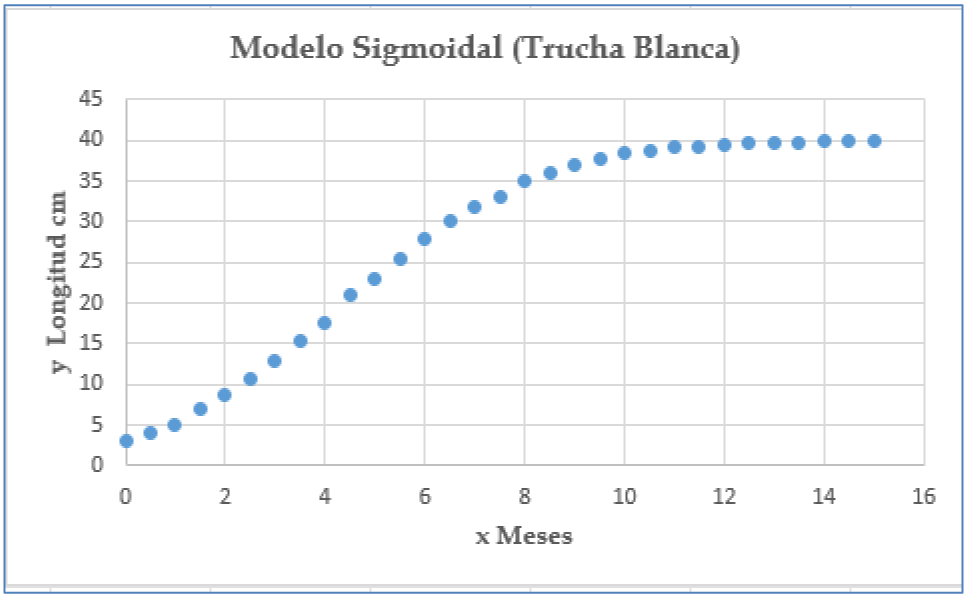

Figura No. 4. Datos de la Trucha Blanca

Características de esta distribución:
Se observa que el crecimiento es más acelerado entre los meses 2 y 8; gráficamente se tiene el punto de inflexión aproximadamente en el mes 5.5; muestra además una desaceleración notable después del mes 9 y en los meses finales del cultivo se registran incrementos muy pequeños. La curva refleja un crecimiento inicial moderado, seguido de una fase de crecimiento rápido y una fase final de desaceleración como es el comportamiento en la mayoría de las curvas de este tipo

Ajuste de los datos al modelo Logístico
Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = \frac{K}{1 + a_0 * e^{a_1 * x}}$$

Aplicando logaritmos y sus propiedades, se tiene que

$$Ln\left(\frac{K-y}{y}\right) = Ln\, a_0 + a_1 x$$

Haciendo $Y = Ln\left(\frac{K-y}{y}\right)$ $\qquad Y = Lna_0 + a_1 x$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, se pueden calcular a_1 y a_0 de la manera siguiente

$$a_1 = \frac{x\sum x_i Y_i - \sum x_i * \sum Y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad Lna_0 = \overline{Y} - a_1\overline{x}$$

Tomando K = 41

				K =	41	
	x	**y**	**(K-y)/y**	**Yi LN((K-y)/y)**	**x^2**	**x*Y**
	0	3	12,666667	2,5389739	0	0
	0,5	4,1	9	2,1972246	0,25	1,0986123
	1	5,1	7,0392157	1,9514968	1	1,9514968
	1,5	7	4,8571429	1,5804504	2,25	2,3706756
	…	…	…	…	…	…
	…	…	…	…	…	…
	14	39,94	0,0265398	-3,629109	196	-50,80753
	14,5	39,9	0,0275689	-3,591066	210,25	-52,07046
	15	40	0,025	-3,688879	225	-55,33319
Sumatorias	**232,5**	**856,44**	**49,997099**	**-37,61719**	**2363,75**	**-550,5843**
Promedios	**7,5**			**-1,213458**		

Utilizando las expresiones para a_1 y a_0:

a1 =	-0,432993
LN a0 =	2,0339864
a0 =	7,6444996

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$\boldsymbol{S_R = (LnY_i - Lna_0 - a_1x_i)^2} \qquad \boldsymbol{S_T = (LnY_i - \overline{LnY})^2}$$

SR	ST
0,2550124	14,080743
0,1441983	11,632754
0,1228523	10,016937
0,0383975	7,8059224
…	…
…	…
0,1590413	5,8353732
0,4268524	5,6530219
0,5960185	6,1277128
3,0920433	**119,33122**

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}} = \sqrt{\frac{119.33122 - 3.0929433}{119.33122}} = 0.986959252$$

Por lo que el modelo Logístico correspondientes es:

$$y = \frac{41}{1 + 7.644499615 * e^{-0.43299x}}$$

Ajuste de los datos al modelo de Brody
Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = K(1 - a_0 * e^{-a_1 x})$$

Aplicando logaritmos y sus propiedades, se tiene que

$$Ln\left(\frac{K - y}{K}\right) = Lna_0 - a_1 x$$

Haciendo $Y = Ln\frac{K}{K-y}$ $\quad$ *se tiene que* $Y = Lna_0 - a_1 x$
Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, se pueden calcular a_1 y a_0 de la manera siguiente:

$$a_1 = -\frac{n\sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad Lna_0 = \overline{Y} - a_1\overline{x}$$

Tomando K = 41

Mes	Longitud (cm)	**LN((K-Y)/K)**		
x	**y**	**Y**	**x²**	**x*Y**
0	3	-0,07598591	0	0
0,5	4,1	-0,10536052	0,25	-0,05268
1	5,1	-0,13283477	1	-0,132835
1,5	7	-0,18721154	2,25	-0,280817
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
13,5	39,8	-3,53125051	182,25	-47,67188

	14	39,94	-3,65530316	196	-51,17424
	14,5	39,9	-3,61826189	210,25	-52,4648
	15	40	-3,71357207	225	-55,70358
Suma =	**232,5**	**856,44**	**-56,0650011**	**2363,75**	**-598,6382**
Promedio=	**7,5**		**-1,80854842**		

a1 = -0.2076

a0 = 0.0804641

A = 1.08379

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$\boldsymbol{S_R = \sum (Y_i - Lna_0 - a_1 x_i)^2} \qquad \boldsymbol{S_T = \sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

SR	**ST**
2,9487118	3,5514696
2,8521541	3,6630474
2,7635183	3,7689687
2,5889838	3,9830578
…	…
…	…
0,0984313	15,467587
3,361445	29,853674
3,2233093	29,45027
3,5707487	30,493815
51,689238	**458,00242**

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}}$$

r* =** ***0,9418822

Por lo que el modelo de Brody correspondientes es:

$$\boldsymbol{y = 41 * (1 - 1.08379 e^{-0.2076})}$$

Ajuste al modelo de Saturación

Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x}$$

Mediante la utilización de las propiedades de la igualdad se tiene que:

$$\frac{a_1 + x}{a_0 x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{1}{a_0}$$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, en la que la pendiente es a_1/a_0 y la ordenada al origen es $1/a_0$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{n\sum \frac{1}{x_i}\frac{1}{y_i} - \sum \frac{1}{x_i}\sum \frac{1}{y_i}}{n\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 - \left(\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)\right)^2}$$

$$\frac{1}{a_0} = \overline{\left(\frac{1}{y_\iota}\right)} - \frac{a_1}{a_0}\overline{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

	x	y	1/x	1/y	(1/x)(1/y)	(1/x)^2
	0,5	4,1	2	0,2439024	0,4878049	4
	1	5,1	1	0,1960784	0,1960784	1
	1,5	7	0,6666667	0,1428571	0,0952381	0,4444444
	…	…	…	…	…	…
	…	…	…	…	…	…
	13,5	39,8	0,0740741	0,0251256	0,0018612	0,005487
	14	39,94	0,0714286	0,0250376	0,0017884	0,005102
	14,5	39,9	0,0689655	0,0250627	0,0017285	0,0047562
	15	40	0,0666667	0,025	0,0016667	0,0044444
Suma	**232,5**	**853,44**	**7,9899743**	**1,6422057**	**1,0146277**	**6,4486005**
Promedio			**0,2663325**	**0,0547402**		

Utilizando las expresiones para a_1 y a_0

a1/a0 =	0,133605	**a0/a1 =**	7,484752
1/a0 =	0,0191568		

a0 =	52,200653
a1 =	6,9742663

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$S_R = \sum (Y_i - Lna_0 - a_1 x_i)^2 \qquad S_T = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

SR	ST
0,00180322	0,035782357
0,00187633	0,019976499
0,001199259	0,007764598
…	…
…	…
1,54283E-05	0,000877022
1,34139E-05	0,000882246
1,0945E-05	0,000880756
9,38715E-06	0,000884479
0,007127492	**0,084251631**

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}} = 0.956766597$$

Por lo que el modelo de Saturación correspondientes es:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x} = 52.200653 \frac{x}{6.9742663 + x}$$

Discusión:

Los modelos matemáticos son herramientas fundamentales para entender el crecimiento de la trucha blanca. En este caso, se comparan tres modelos: el logístico, el de Brody y el de saturación, cuyos coeficientes de correlación son 0.9868, 0.94188 y 0.956766, respectivamente. El modelo logístico presenta el mejor ajuste, lo que sugiere que el crecimiento de la trucha blanca sigue un patrón que se estabiliza a medida que se alcanza la capacidad de carga del ambiente. Esto es crucial para la gestión sostenible de las poblaciones de trucha. En el caso del modelo de Brody a diferencia del utilizado por Ulloa, et. al. 2024 se utiliza otro modelo también simplificado.

El modelo de Saturación, aunque menos preciso que el logístico, muestra un coeficiente de correlación significativo, indicando que también puede ser útil para describir el crecimiento en ciertas condiciones. Por otro lado, el modelo de Brody, con el coeficiente más bajo, sugiere que su aplicabilidad podría ser limitada en el contexto del crecimiento de la trucha blanca. Sin embargo, cada modelo tiene sus ventajas y desventajas, y la elección del modelo adecuado dependerá de las condiciones específicas del estudio y de los objetivos de la investigación.

Para futuras investigaciones, se recomienda realizar estudios comparativos en diferentes condiciones ambientales y de alimentación, así como considerar la inclusión de variables adicionales que puedan influir en el crecimiento, como la temperatura del agua y la densidad poblacional. Además, sería beneficioso aplicar modelos híbridos que integren características de los modelos existentes para mejorar la precisión de las predicciones sobre el crecimiento de la trucha blanca.

Conclusiones:

El proceso de análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico permite obtener una representación matemática precisa del crecimiento, lo que es fundamental para la comprensión de los procesos biológicos subyacentes y para la toma de decisiones en la gestión de recursos.

Para cada uno de los modelos seleccionados para el desarrollo del trabajo se realizó el análisis numérico de los datos disponibles ajustándolos a los datos de la trucha blanca, en cada uno de ellos se calcularon los parámetros destacando que en los primeros se tomó con base en la tendencia de los datos el valor de la asíntota superior, en el último esto no es necesario ya que el modelo no se representa en términos del crecimiento máximo, en todos se evaluó el coeficiente de correlación, como se muestra a continuación:

Modelo	Coeficiente de correlación r
Logístico	r = 0.98695
Brody	r = 0.9418822
De Saturación	r = 0.956766597

La elección del modelo más adecuado depende de los objetivos específicos del estudio, la disponibilidad de datos y la complejidad requerida del modelo.

Referencias bibliográficas

Burnham, K.P., D.R. Anderson. 2002. Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach. Springer. 2nd Ed. New York, N.Y. 488p.

Cadima, E.L. 2003. Manual de evaluación de recursos pesqueros. Documento Técnico de Pesca. No. 393. Roma, FAO. 162p.

Cailliet, G.M., W.D. Smith, H.F. Mollet, K.J. Goldman. 2006. Age and growth studies of chondrichthyan fishes: the need for consistency in the terminology, verification, validation, and growth function fitting. Environmental Biology of Fishes. 77: 211-228.

Cruz-Vásquez, R., G. Rodríguez-Domínguez, E. Alcántara-Razo, E.A. Aragón-Noriega. 2012. Estimation of individual growth parameters of the Cortes geoduck Panopea globosa from the central Gulf of California using a multimodel approach. Journal of Shellfish Research. 31(3): 725-732.

Gulland, J.A. 1983. Fish stock assessment. Chichester: FAO/John Wiley and Sons. 1: 223p.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación. Sexta Edición. McGraw-Hill / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. Santa Fe, México. 634 p.

Moreau, J. 1987. Mathematical and biological expression of growth in fishes: recent trends and further developments. In: Summerfelt RC, Hall GE (eds) Age and growth of fish. Iowa State University Press, Ames. Pp. 81–113.

Ortega, D. (2000). *Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Agronomía*, Tesis (en opción al título de Master en Ciencias Pedagógicas), UCLV, Santa Clara, Cuba, 2000.

Ricker, W.E. 1979. Growth rates and models. In: Hoar, W.S., Randall, D.J., Brett, J.R. (eds.). Fish Physiology. Academic Press, New York. Pp. 677–743.

Ulloa, J., Arrieta, J. (2011). *La deconstrucción de la modelación del crecimiento de microalga*s. En Lestón, L (Eds), Acta Latinoamericanas de Matemática Educativa 24 (pp- 739 – 746). México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Ulloa, J.; Arrieta, J.; Uribe, N.; Flores, J.; Ortega, M. (2024). Criterio de análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico para representar el Crecimiento de Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*. Acta Pesquera, Vol. 10. No. 19.

Wenger , E. (1998a). Communities of Practice: learning, meaning and indentity. Cambridge University Press (edición española: Comunidades de Práctica: aprendizaje, significado e identidad, Paidós, 2002)