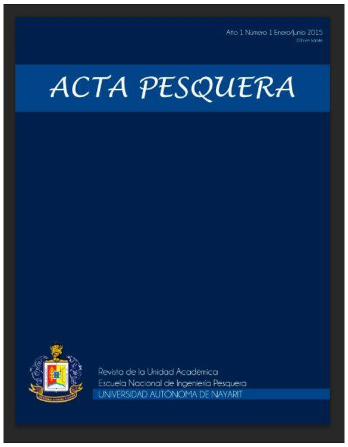

Revista ACTA PESQUERA.
Volumen 10 No. 19.
ISSN: 2395-8944
Periodo: Enero – Junio de 2024
San Blas, Nayarit. México
Pp. 26 - 48
Recibido: Abril 23 de 2024
Aprobado: Junio 02 de 2024
DOI: 10.60113/ap.v10i19.133

Criterio de análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico para representar el Crecimiento de Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*)

Data Fit Analysis Criterion Using Numerical Analysis to represent the Growth of Channel Catfish (*Ictalurus punctatus*)

José Trinidad Ulloa Ibarra
ENIP - UAN
jtulloa@uan.edu.mx
ORCID:https:// 0000-0002-6382-7588

Jaime L. Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero
jaime.arrieta@gmail.com
ORCID:https:// 0009-0005-3208-5218

Nidia Dolores Uribe Olivares
CEBETIS 100
nidy98@hotmail.com
ORCID: https://0000-0003-2525-4157

Juan Felipe Flores Robles
Universidad Autónoma de Nayarit
juan.f10res@hotmail.com
ORCID: https://0009-0003-4183-7501

María Inés Ortega Arcega
UACBI – UAN
maria.arcega@uan.edu.mx
ORCID:https://0000-0002-1058-8106

Criterio de análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico para representar el Crecimiento de Bagre de canal (*Ictalurus punctatus)*

Data Fit Analysis Criterion Using Numerical Analysis to represent the Growth of Channel Catfish (Ictalurus punctatus)

Resumen.
En el desarrollo del presente trabajo, se utilizó el análisis de ajuste de datos para seleccionar el modelo que mejor representa datos del bagre de canal, comparando los modelos: Logístico, Gompertz, Brody y el de Saturación con la finalidad de lograr hacer una propuesta sobre el mejor de ellos. En biología pesquera, los modelos sigmoidales, también conocidos como modelos de crecimiento en forma de S, son herramientas matemáticas ampliamente utilizadas para representar el crecimiento de poblaciones de peces y otras especies acuáticas. Estos modelos se caracterizan por su forma en S, que refleja un crecimiento inicial lento, seguido de una aceleración hasta alcanzar un límite asintótico. Es importante destacar que estos modelos son simplificaciones de la realidad y no siempre representan todos los aspectos de la dinámica poblacional de una especie. Por lo tanto, es crucial utilizarlos con precaución y considerar otras fuentes de información al realizar inferencias sobre el estado de una población pesquera. Es importante evaluar las ventajas y desventajas de cada modelo antes de seleccionar el más apropiado. Su capacidad para modelar el crecimiento en longitud de peces de manera precisa lo ha convertido en una herramienta esencial para la evaluación de poblaciones y la gestión pesquera.

Palabras clave: criterios, crecimiento, análisis numérico, ajuste de datos

Abstract
In the development of this work, data adjustment analysis was used to select the model that best represents channel catfish data, comparing the models: Logistic, Gompertz, Brody and Saturation in order to make a proposal on the best of them. In fisheries biology, sigmoidal models, also known as S-shaped growth models, are mathematical tools widely used to represent the growth of populations of fish and other aquatic species. These models are characterized by their S-shape, which reflects slow initial growth, followed by acceleration until reaching an asymptotic limit. It is important to highlight that these models are simplifications of reality and do not always represent all aspects of the population dynamics of a species. Therefore, it is crucial to use them with caution and consider other sources of information when making inferences about the status of a fishery stock. It is important to evaluate the advantages and disadvantages of each model before selecting the most appropriate one. Its ability to accurately model fish length growth has made it an essential tool for stock assessment and fisheries management.

Key words: criteria, growth, numerical analysis, data fitting

Introducción

Para explicar los fenómenos observados en las diferentes áreas, la ciencia desarrolla teorías y modelos, estos últimos los utiliza para crear conexiones, causas y explicaciones. (Cadima, 2003). En el caso del crecimiento individual, se aplican modelos matemáticos para dar cuenta de este aspecto a lo largo del ciclo vital de la especie. Los modelos de crecimiento de los grupos de población explotados describen con precisión las etapas de la vida en las que sufren la explotación, (Gulland, 1983). Las descripciones matemáticas del crecimiento se basan en supuestos biológicos para explicar este fenómeno en las especies (Ricker, 1979).

Con frecuencia es importante e incluso necesario utilizar varios modelos o funciones de crecimiento para caracterizar adecuadamente este aspecto de una especie, (Calliet et al., 2006). Para ello se deben seleccionar modelos apropiados a la representación de la realidad biológica, con bases estadísticas en sus ajustes y confiabilidad (Moreau, 1987).

En biología pesquera, los modelos sigmoidales, también conocidos como modelos de crecimiento en forma de S, son herramientas matemáticas ampliamente utilizadas para representar el crecimiento de poblaciones de peces y otras especies acuáticas. Estos modelos se caracterizan por su forma en S, que refleja un crecimiento inicial lento, seguido de una aceleración hasta alcanzar un límite asintótico.

Se puede afirmar que no existe un modelo sigmoidal único que sea el "mejor" para todas las aplicaciones en biología pesquera. La elección del modelo adecuado depende de las características específicas del caso de estudio (especie en estudio) y de los objetivos del análisis. Es importante evaluar las ventajas y desventajas de cada modelo antes de seleccionar el más apropiado. Sin embargo, el modelo de Bertalanffy es el modelo sigmoidal más utilizado en biología pesquera debido a su simplicidad y flexibilidad. Su capacidad para modelar el crecimiento en longitud de peces de manera precisa lo ha convertido en una herramienta esencial para la evaluación de poblaciones y la gestión pesquera.

Es importante destacar que los modelos sigmoidales son simplificaciones de la realidad y no siempre representan todos los aspectos de la dinámica poblacional de una especie. Por lo tanto, es crucial utilizar estos modelos con precaución y considerar otras fuentes de información al realizar inferencias sobre el estado de una población pesquera.

Para determinar las ventajas y desventajas entre diferentes modelos sigmoidales, se pueden realizar varios tipos de análisis comparativos. Entre estos se encuentran: Análisis de ajuste de datos; Análisis de parsimonia; Análisis de capacidad predictiva; Análisis de estabilidad; Análisis de interpretabilidad; Análisis de robustez.

Existen además otros métodos para seleccionar el modelo que mejor se aproxima de un grupo de modelos candidatos utilizando criterios de teoría de la información, (Burnham y Anderson, 2002). Este tipo de herramientas exploratorias son muy recientes en los estudios de pesquerías, donde han sido utilizados por menos de una década (Cruz-Vázquez et al., 2012).

La Matemática Aplicada en las ciencias agropecuarias y pesqueras permiten brindar criterios y herramientas básicas para manejar e interpretar cada vez mejor la actividad, satisfacer las demandas de nuevas tecnologías para producir en mercados globales altamente competitivos resguardando los recursos naturales y tomar decisiones a mediano y largo plazo en condiciones similares de experimentación (Ortega, 2000).

La biología matemática, por ejemplo, permite estudiar la dinámica de poblaciones, pues hay modelos y ecuaciones diferenciales que explican cómo funcionan. El modelo más sencillo es tener dos especies en un ecosistema (una es depredadora y la otra, presa). Sirve para predecir cómo puede evolucionar y ofrece información para actuar sobre ese sistema y evitar, por ejemplo, que se produzca la extinción de una de ellas (Lombardero, 2014).

La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencia de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades (Ulloa y Arrieta, 2011). La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

En el desarrollo del presente trabajo, se utilizó el análisis de ajuste de datos para seleccionar el modelo que mejor representa datos del bagre de canal, comparando los modelos: Logístico, Gompertz, Brody y el de Saturación con la finalidad de lograr hacer una propuesta sobre el mejor de ellos.

Aspectos biológicos y ecológicos del recurso

El nombre científico del bagre de canal es **Ictalurus punctatus**. Es una especie de pez de agua dulce de la familia Ictaluridae, orden Siluriformes. Es nativo de América del Norte, donde se encuentra en ríos, lagos y embalses.

El bagre de canal es una especie de bagre nativo de América del Norte. Es una especie popular en la acuicultura y se cultiva en todo el mundo. El crecimiento del bagre de canal es rápido. En condiciones óptimas, los bagres de canal pueden alcanzar una longitud de 1

metro y un peso de 25 kilogramos en dos años. El bagre es un pez de agua dulce que se encuentra en todo el mundo. Es una especie importante en la pesca comercial y recreativa.

El crecimiento del bagre varía según la especie, la temperatura del agua y la disponibilidad de alimento.

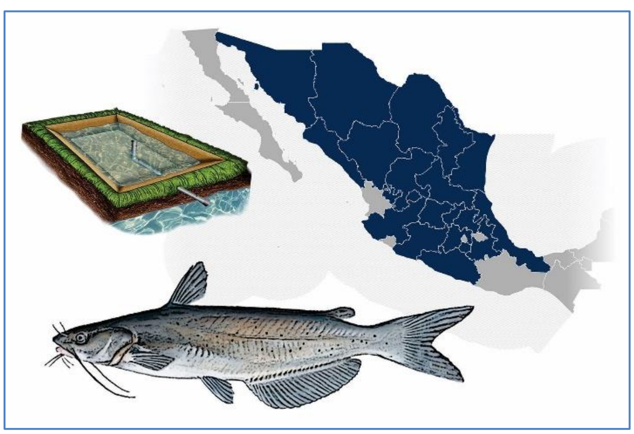

Figura No. 1. Bagre de Canal

En general, el crecimiento del bagre se puede describir como una función exponencial. La velocidad de crecimiento aumenta a medida que el pez se hace más grande. Los factores que influyen en el crecimiento del bagre incluyen la temperatura del agua, la disponibilidad de alimento y la densidad de población (Ulloa, et al, 2023).

Es esencial comprender el significado de un patrón o función sigmoidea, independientemente de si construyes tu propia red neuronal o construyes un modelo de crecimiento de la levadura. El aprendizaje de problemas complejos se explica por la función sigmoidea y las curvas de crecimiento.

Es importante tener en cuenta que muchos organismos pasan por varias fases distintas de crecimiento durante su vida. Una variable de tamaño o peso medible a lo largo del tiempo puede servir para cuantificar esos patrones.

Un patrón sigmoideo se observa comúnmente en condiciones que son generalmente consistentes, y donde una variable aumenta sucesivamente exponencialmente, luego linealmente, y por último asintóticamente. Cuando se traza una curva en forma de S, o una función sigmoidea, se puede ver en la siguiente figura.

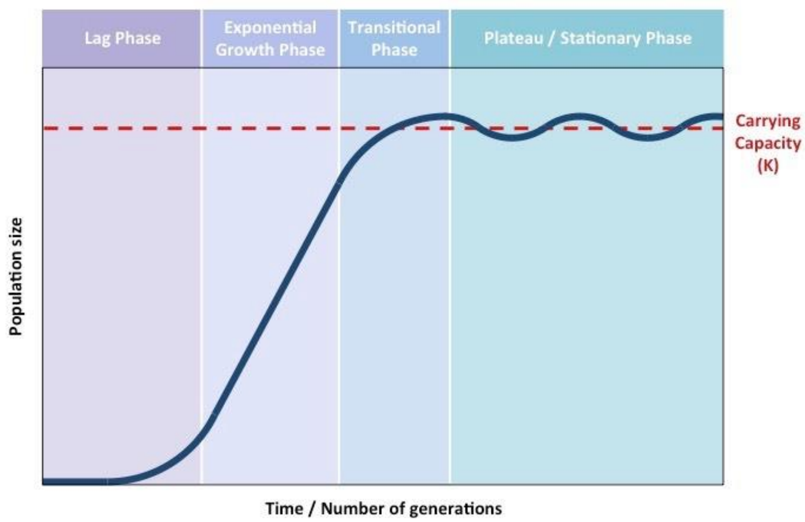

Figura No.2 Curva Sigmoidal

Se debe recordar que una curva sigmoidal consta de tres etapas: un período acelerado (etapa exponencial), un período de transición y un período de meseta.

El problema

La modelación es una práctica que se ejerce en diversas comunidades entre las que se encuentran como es de esperar las ciencias del mar y es una actividad recurrente que otorga identidad a los grupos de trabajo.

Con base en diferentes estudios consideramos que la modelación, además, puede funcionar como un vínculo entre la escuela y su entorno (Arrieta, 2003; Ulloa y Rodríguez, 2013). Para ello se realizan investigaciones sobre las prácticas de modelación de comunidades, en este caso, de profesionales de la pesca estás prácticas se encuentran constituidas, y como tal, al igual que otros muchos procesos se realizan de forma casi mecánica o algorítmica, (Ulloa y Arrieta, 2012).

A continuación, se presentan las características más importantes de los modelos que se compararán para el desarrollo de este trabajo:

Modelo logístico:
El modelo logístico, también conocido como modelo de crecimiento en dos fases, es una herramienta matemática ampliamente utilizada para representar el crecimiento de peces en función del tiempo. Este modelo no lineal se basa en la ecuación sigmoidea, la cual describe una curva en forma de "S" que refleja el comportamiento típico del crecimiento poblacional: un crecimiento inicial lento, seguido de un aumento rápido y finalmente una saturación a medida que se alcanza un límite asintótico.

La ecuación matemática del modelo logístico para el crecimiento de peces se expresa como:

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{L\infty}{1 + e^{-k(t - t0)}}}$$

Donde:

- **L(t)**: Longitud promedio de los peces en el tiempo "t".
- **L∞**: Longitud asintótica, que representa la longitud máxima promedio que pueden alcanzar los peces.
- **k**: Tasa de crecimiento relativa, que indica la velocidad a la que la población se acerca a su longitud asintótica.
- **t**: Tiempo, generalmente medido en días, meses o años.
- **t_0**: Edad a la talla media ($L_0/2$), que representa el tiempo en el que la población alcanza la mitad de su longitud asintótica.

Interpretación de los parámetros:

- **L∞**: La longitud asintótica. (L∞) es un parámetro fundamental del modelo, ya que representa el potencial máximo de crecimiento de la población. Esta longitud está determinada por factores genéticos y ambientales, como la disponibilidad de alimento, la temperatura del agua y la competencia.
- **k**: La tasa de crecimiento relativa (k) indica la rapidez con la que la población se acerca a su longitud asintótica. Un valor alto de k implica un crecimiento rápido en las primeras etapas, mientras que un valor bajo de k indica un crecimiento más lento y gradual.
- **t_0**: La edad a la talla media (t_0) proporciona información sobre el patrón de crecimiento inicial de la población. Un valor bajo de t_0 indica un crecimiento rápido desde las primeras etapas, mientras que un valor alto de t_0 sugiere un crecimiento más lento al inicio y una aceleración posterior.

Aplicaciones del modelo logístico:
El modelo logístico tiene una amplia gama de aplicaciones en la pesca y la acuicultura, incluyendo:

- **Estimación del potencial de crecimiento**: El modelo logístico se utiliza para estimar la longitud máxima ($L\infty$) que puede alcanzar una población de peces en un entorno determinado. Esta información es crucial para establecer cuotas de pesca sostenibles y gestionar las poblaciones de peces de manera efectiva.
- **Diseño de sistemas de producción**: En la acuicultura, el modelo logístico se emplea para diseñar sistemas de producción óptimos que maximicen el crecimiento de los peces y optimicen el uso de recursos.
- **Evaluación del impacto ambiental**: El modelo logístico puede ser utilizado para evaluar el impacto de factores ambientales, como la temperatura, la salinidad o la contaminación, en el crecimiento de las poblaciones de peces.
- **Análisis del crecimiento individual**: El modelo logístico también se puede aplicar para analizar el crecimiento individual de los peces, lo que permite identificar patrones de crecimiento y evaluar la salud de las poblaciones.

Modelo de Gompertz

El modelo de Gompertz es una ecuación que se utiliza para describir el crecimiento de organismos, como peces, en función del tiempo. Este modelo asume que el crecimiento es inicialmente lento, luego se acelera y finalmente se desacelera hasta alcanzar un valor asintótico máximo.

La ecuación del modelo de Gompertz viene dada por:

$$L(t) = L_0 * \exp[G(1 - \exp(-k*t))]$$

Donde:

- $L(t)$: Este término representa la longitud (o peso) del organismo en un tiempo t determinado. Es la variable dependiente que se está modelando.
- L_0: Este parámetro representa la longitud (o peso) inicial del organismo al inicio del periodo de crecimiento modelado ($t = 0$). Es el valor inicial de la curva de crecimiento
- G = Este parámetro se conoce como el parámetro de crecimiento intrínseco o tasa de madurez. Representa la longitud (o peso) máxima que el organismo puede alcanzar en relación con su longitud (o peso) inicial. Es decir, G determina la amplitud de la curva de crecimiento.
- k = constante de crecimiento específica. Determina la tasa a la cual el organismo alcanza su longitud (o peso) máximo. Un valor alto de k implica que el organismo alcanza rápidamente su longitud (o peso) máximo, mientras que un valor bajo indica un crecimiento más lento.
- t = tiempo

Los parámetros L_0, G y k son constantes que se determinan empíricamente a partir de datos reales de crecimiento.

- exp(-k*t): Esta expresión representa la fracción de la longitud (o peso) máximo que aún no se ha alcanzado en el tiempo t. A medida que t aumenta, esta fracción disminuye exponencialmente.
- 1 - exp(-k*t): Esta expresión es complementaria a la anterior y representa la fracción de la longitud (o peso) máximo que ya se ha alcanzado en el tiempo t.
- G(1 - exp(-k*t)): Esta expresión combina los parámetros G y k, y representa el logaritmo natural de la longitud (o peso) máximo alcanzado en el tiempo t.

El modelo de Gompertz tiene varias aplicaciones importantes en diferentes campos, principalmente relacionados con el estudio del crecimiento y la dinámica de poblaciones. Algunas de las aplicaciones más destacadas son: Biología y ecología; Medicina y epidemiología; Economía y finanzas; Demografía; Ingeniería y tecnología

Modelo de Brody

El modelo de Brody, también conocido como modelo de crecimiento exponencial simple, es una herramienta matemática utilizada para representar el crecimiento de peces en función del tiempo. Este modelo no lineal se basa en la suposición de que la tasa de crecimiento de los peces es proporcional a su tamaño actual. La ecuación matemática del modelo de Brody para el crecimiento de peces se expresa como:

$$L(t) = L_0(e^{Kt})$$

Donde:

- **L(t)**: Longitud promedio de los peces en el tiempo "t".
- **L_0**: Longitud inicial promedio, que representa la longitud promedio de los peces al inicio del estudio (t = 0).
- **k**: Tasa de crecimiento relativa, que indica la velocidad a la que la población crece en relación con su tamaño actual.
- **t**: Tiempo, generalmente medido en días, meses o años.

Interpretación de los parámetros:

- **L_0**: La longitud inicial promedio (L_0) proporciona información sobre el tamaño inicial de la población. Esta longitud es influenciada por factores como las condiciones ambientales durante el desarrollo temprano y las características reproductivas de la especie.
- **k**: La tasa de crecimiento relativa (k) indica la velocidad a la que la población crece en relación con su tamaño actual. Un valor alto de k implica un crecimiento rápido, especialmente en las primeras etapas, mientras que un valor bajo de k sugiere un crecimiento más lento.

Aplicaciones del modelo de Brody:

El modelo de Brody tiene aplicaciones limitadas en la pesca y la acuicultura, principalmente debido a su simplicidad y la suposición de que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño actual, lo que no siempre es realista para el crecimiento de peces. Sin embargo, el modelo puede ser útil en algunas situaciones:

- **Estimativas preliminares del crecimiento:** El modelo de Brody puede proporcionar una estimación inicial rápida del crecimiento de una población de peces en condiciones ambientales relativamente estables.
- **Comparaciones entre poblaciones:** El modelo de Brody se puede utilizar para comparar las tasas de crecimiento de diferentes poblaciones de peces en condiciones similares.
- **Modelización de crecimiento a corto plazo:** El modelo de Brody puede ser adecuado para modelar el crecimiento de peces a corto plazo, especialmente en las primeras etapas de desarrollo.

El Modelo de Saturación

De manera general se puede decir que el modelo de saturación es un modelo de crecimiento no lineal que se basa en la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = r * \left(\frac{x}{K}\right)^n$$

donde:

x es el tamaño del bagre de canal en un momento dado

t es el tiempo

r es la tasa de crecimiento intrínseca

K es la capacidad de carga del ecosistema

n es un parámetro que controla la forma de la curva de crecimiento

El modelo de saturación tiene las siguientes características:

- El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que el bagre de canal alcanza un tamaño máximo.
- El tamaño máximo del bagre de canal es igual a la capacidad de carga del ecosistema.
- La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.
- El parámetro n controla la forma de la curva de crecimiento. Un valor de n menor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más pronunciada, mientras que un valor de n mayor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más suave.

El modelo de saturación tiene las siguientes suposiciones:

- El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que la población alcanza un tamaño máximo.
- El tamaño máximo de la población es igual a la capacidad de carga del ecosistema.
- La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.

Debilidades y limitaciones en su utilización en especies marinas

El modelo de saturación es una herramienta útil para describir el crecimiento de una variedad de poblaciones, incluyendo especies marinas. Sin embargo, el modelo tiene algunas debilidades y limitaciones que deben ser consideradas al utilizarlo en especies marinas.

Una de las debilidades del modelo de saturación es que asume que el tamaño máximo de la población es constante. En el caso de especies marinas, el tamaño máximo de la población puede variar en función de factores como la temperatura, la salinidad, y la disponibilidad de alimento.

Otra debilidad del modelo de saturación es que asume que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual de la población y el tamaño máximo. En el caso de especies marinas, la tasa de crecimiento de la población puede estar influenciada por otros factores, como la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.

Por estas razones, el modelo de saturación debe utilizarse con precaución en especies marinas. El modelo puede ser utilizado para proporcionar una estimación general del crecimiento de la población, pero es importante considerar las debilidades y limitaciones del modelo al interpretar los resultados.

Específicamente, en el caso de especies marinas, el modelo de saturación puede tener las siguientes limitaciones:

- El tamaño máximo de la población puede variar en función de la temperatura del agua.
- La tasa de crecimiento de la población puede verse afectada por la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.
- El modelo puede no ser adecuado para describir el crecimiento de especies marinas que experimentan cambios estacionales en su crecimiento.

En general, el modelo de saturación es una herramienta útil para describir el crecimiento de especies marinas. Sin embargo, es importante ser consciente de sus debilidades y limitaciones al interpretar los resultados.

Ventajas del modelo de saturación

- El modelo de saturación tiene una serie de ventajas que lo convierten en una herramienta útil para describir el crecimiento de una variedad de poblaciones. Estas ventajas incluyen:
- Flexibilidad: el modelo de saturación permite controlar la forma de la curva de crecimiento mediante el parámetro n. Esto puede ser útil para ajustar el modelo a diferentes poblaciones o para investigar los efectos de diferentes factores en el crecimiento de la población.
- Simplicidad: el modelo de saturación es relativamente simple de entender y aplicar. Esto lo hace una herramienta accesible para científicos y otros usuarios.
- Potencial para la predicción: el modelo de saturación puede ser utilizado para predecir el crecimiento futuro de una población. Esto puede ser útil para la gestión de poblaciones, como la conservación de especies amenazadas o el cultivo de especies comerciales.

Todos estos modelos se caracterizan por representar curvas sigmoideas, lo cual es típico del crecimiento de peces y otros organismos. Sin embargo, difieren en la forma específica de la curva, la interpretación de los parámetros y la capacidad para ajustarse a diferentes patrones de crecimiento.

La elección del modelo más adecuado dependerá de las características específicas del crecimiento de la especie de pez en estudio, la disponibilidad de datos y el ajuste empírico de los modelos a los datos observados. En algunos casos, puede ser necesario explorar modelos más complejos o combinar diferentes modelos para obtener una representación precisa del crecimiento.

Antecedentes
En el ámbito local (Universidad Autónoma de Nayarit), la investigación tiene diversos antecedentes, los principales antecedentes son los trabajos acerca de la modelación como práctica social y las prácticas de análisis de los resultados de la composición de las especies. Uno de los aspectos fundamentales de esta línea de investigación consiste en situar el estudio de las prácticas de modelación en una

- .
- Estos modelos tienen sus propias fortalezas y debilidades.

La comparación de los cuatro modelos puede ayudar a los profesionales de la pesca a comprender mejor el crecimiento del bagre de canal. La comparación también puede ayudarles seleccionar el modelo más adecuado para un propósito específico.

En resumen, la comparación de los tres modelos puede proporcionar información sobre los siguientes aspectos del crecimiento del bagre de canal:

comunidad, en un lugar y en un tiempo (Ulloa, 2013). Bajo el marco de la línea de investigación y a partir de la implementación de la modelación matemática como unidad de aprendizaje en el área biológico, agropecuaria y pesquera de la Universidad Autónomo de Nayarit, se han desarrollo por el grupo de investigación diferentes trabajos cuyo objetivo es el de presentar maneras de modelación sin la utilización de las ecuaciones diferenciales ya que en los programas de estudio de las licenciaturas del área no aparece el estudio de ese tipo de ecuaciones en ninguna unidad de aprendizaje.

Justificación
La comparación de los cuatro modelos para el crecimiento del bagre de canal es importante por lo siguiente:

- Los cuatro modelos son modelos no lineales que han sido utilizados para describir el crecimiento de una variedad de especies de peces

- La forma de la curva de crecimiento
- El tamaño máximo del bagre de canal
- La tasa de crecimiento del bagre de canal
- La influencia de los factores ambientales en el crecimiento del bagre de canal

La comparación de los cuatro modelos también puede ayudar a desarrollar estrategias de manejo para la conservación del bagre de canal. Por ejemplo, si el modelo de Johnson se ajusta mejor a los datos, esto podría indicar que el tamaño máximo del bagre de canal es constante y que la tasa de crecimiento del bagre de canal es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual del bagre de canal y el tamaño máximo. Esta información podría utilizarse para desarrollar estrategias de manejo que permitan a los bagres de canal alcanzar su tamaño máximo.

Marco Teórico

Como se ha especificado en trabajos anteriores del grupo de modelación en Nayarit, se toma como base a la teoría Socioepistemológica como el marco ideal ya que se basa en el análisis de las prácticas de las comunidades ya sean de estudio, de práctica o profesionales considerando al grupo social en el que se desarrollan las actividades como el aspecto preponderante para entender la generación del conocimiento.

La Socioepistemología es una teoría que se basa en el estudio de la epistemología de prácticas considerando los aspectos socioculturales ligados a la producción y difusión de conocimiento matemático, así como los aspectos que atañen a los procesos de cognición, de naturaleza didáctica y construcción de dicho conocimiento (Cordero, 2005). En esta teoría se parte del supuesto de que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento, para con ello poder modelar la práctica que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Cordero, 2001).

Esta teoría cuyo surgimiento fue en el área educativo, específicamente en el estudio de las prácticas sociales que influyen en las prácticas sociales y culturales ha sido adoptada en otras áreas, entre ella en las comunidades de profesionales, puede aplicarse en la biología pesquera y por lo tanto en la modelación, considerando los conocimientos empíricos que se utilizan para realizarla, pero tratando de encontrar un sustento científico formal para explicarlos.

Desde esta perspectiva tiene una gran importancia el involucrar a diferentes actores, como a los pescadores y sin faltar a las comunidades que realizan esa práctica para tratar de llegar a una adecuada construcción de los modelos y a la validación de los mismos, ya que este proceso puede enriquecer los modelos con conocimientos contextuales y experiencias prácticas. La socioepistemología enfatiza la importancia de la contextualización de los modelos considerando para esto las condiciones sociales y los ambientes específicos de las regiones pesqueras.

De igual manera la teoría recomienda el diálogo entre diferentes disciplinas, en este caso las matemáticas con la biología pesquera, sin olvidar a la ecología, la gestión de los recursos naturales, lo que llevará a la construcción de modelos integrales y relevantes.

Al aplicar la teoría de la socioepistemología a la modelación en biología pesquera, se busca construir modelos más inclusivos, contextualizados y sensibles a las realidades sociales y culturales de las comunidades pesqueras, lo que puede conducir a una gestión más sostenible y equitativa de los recursos pesqueros.

Metodología

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), la investigación es exploratoria, descriptiva y correlacional. El tipo de diseño de la investigación es no experimental, ya que se usarán datos históricos de desembarque de tallas y por otro lado las variables no serán modificadas, sino analizadas mediante métodos y técnicas para la estimación de parámetros poblacionales. La población de estudio fue la especie "Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*)"

Se realizó un análisis numérico puesto que solo se requieren conocimientos básicos de la aritmética y del algebra, y además:

- El análisis numérico permite encontrar soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales no lineales.
- Esto permite estimar los parámetros de los modelos de crecimiento logístico y de Johnson a partir de datos experimentales.
- Los datos experimentales pueden ser obtenidos de una variedad de fuentes.
- Una vez que se han estimado los parámetros de los modelos, se pueden utilizar para predecir el crecimiento futuro de la población.

Es decir, el análisis numérico es una herramienta valiosa para determinar modelos de crecimiento logístico y de Johnson. El análisis numérico permite estimar los parámetros de los modelos a partir de datos experimentales, lo que permite predecir el crecimiento futuro de la población.

En la primera etapa se toma cada uno de los modelos, se linealiza y se hacen los comparativos del original y del linealizado a fin de establecer analogías y con ello poder calcular el coeficiente de correlación.

La linealización de modelos sigmoidales es un enfoque utilizado para simplificar el análisis y la resolución de ecuaciones no lineales que describen el comportamiento de sistemas biológicos, químicos o físicos. Este método consiste en transformar la ecuación sigmoidal original en una expresión lineal aproximada mediante la aplicación de ciertas suposiciones y manipulaciones matemáticas, como se muestra en la figura 3, en la que una curva sigmoidal se transforma en una recta mediante la utilización de logaritmos.

Figura No. 3. Linealización del modelo sigmoidal de Brody
Cambiando y por Ln(K – y)

Como ventajas de la linealización de curvas, podemos decir que las ecuaciones lineales son más fáciles de analizar tanto desde el aspecto analítico como del gráfico por ser expresiones más sencillas y manejables sobre todo en el caso de usuarios sin un adecuado manejo de las matemáticas.

Las desventajas son: la linealización implica una aproximación, lo que puede interpretarse principalmente como una representación no muy exacta del sistema original, lo que puede llevar a errores y a resultados imprecisos. En muchos casos el rango de validez de la ecuación lineal es válida son en un rango específico de las variables.

Como un obstáculo de importancia es el de que algunos modelos sigmoidales pueden tener formas matemáticas complejas, lo que dificulta la linealización, ejemplo de esto son los modelos que implican productos y/o cocientes; de igual manera se pueden tener modelos con varios parámetros desconocidos, lo que complica la linealización y la interpretación y/o estimación de estos a partir de la forma lineal. Incluso si se logra una linealización exitosa, puede ser difícil interpretar los resultados obtenidos a partir de la forma lineal en términos del modelo sigmoidal original y su significado físico o biológico.

Una herramienta de gran utilidad en la linealización de los modelos sigmoidales es el uso de los logaritmos, esto permite convertir la curva en la recta, mediante el siguiente procedimiento: Primeramente, identificar la ecuación sigmoidal, enseguida aplicar la transformación logarítmica, para ello se debe considerar la conveniencia de utilizar logaritmos naturales o decimales; realizar las operaciones algebraicas necesarias para aislar la variable independiente en un lado de la ecuación y seguir hasta llegar a una expresión lineal del tipo $y = mx + b$

Sin embargo, es importante tener en cuenta que la linealización mediante logaritmos tiene sus limitaciones. Sólo es válida en un rango específico de valores y puede introducir errores si se extrapola más allá de ese rango. Además, la transformación logarítmica puede no ser apropiada para ciertas formas funcionales o cuando se involucran valores negativos, como el caso de presentarse en la linealización del cálculo de logaritmos de cantidades negativas.

Ajuste de datos

Para realizar el análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico para representar el crecimiento, se pueden seguir los siguientes pasos:

- Se deben obtener los datos experimentales o de campo relacionados con el crecimiento de la población o el organismo de interés.
- Se debe seleccionar un modelo matemático apropiado para describir el patrón de crecimiento observado.
- Se deben estimar los parámetros del modelo seleccionado utilizando técnicas de análisis numérico. Esto implica minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo.
- Una vez obtenidos los parámetros estimados, se deben evaluar la bondad de ajuste y la precisión del modelo.
- Si es posible, se debe validar el modelo utilizando un conjunto de datos independiente. Esto implica aplicar el modelo con los parámetros estimados a un nuevo conjunto de datos y evaluar su capacidad predictiva.
- Finalmente, se deben interpretar los parámetros estimados del modelo en términos biológicos y evaluar su coherencia con el conocimiento existente sobre el crecimiento del organismo o población en estudio.

Resultados

Datos de crecimiento del Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*

Tabla 1. Datos para obtención del modelo

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	9,5	14,2	18,75	23,65	26,4	28,4	30,2	33,1	34,6	36,8	39,8	40

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
42,4	45,8	47,1	49,3	51,6	52	52,8	53,2	54,7	56,3	57	57,4	57,9

Representación gráfica de los datos:

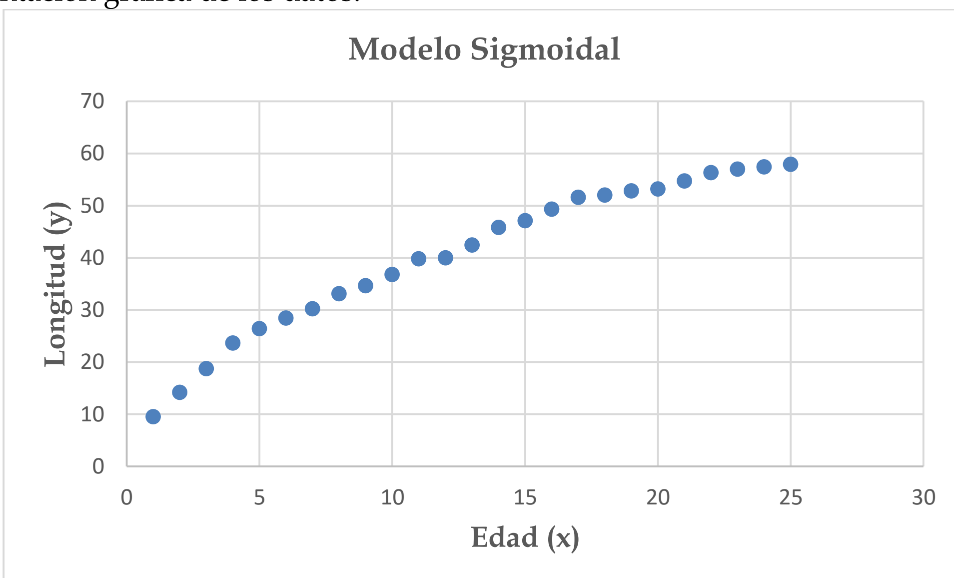

Figura No. 4. Datos del Bagre de Canal

Ajuste de los datos al modelo Logístico

Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$\boldsymbol{y = \frac{K}{1 + a_0 * e^{a_1 * x}}}$$

Aplicando logaritmos y sus propiedades, se tiene que

$$\boldsymbol{Ln\left(\frac{K-y}{y}\right) = Ln\, a_0 + a_1 x}$$

Haciendo $\boldsymbol{Y = Ln\left(\frac{K-y}{y}\right)}$ $\boldsymbol{Y = Lna_0 + a_1 x}$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, se pueden calcular a_1 y a_0 de la manera siguiente

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{x\sum x_i Y_i - \sum x_i * \sum Y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boldsymbol{Lna_0 = \overline{Y} - a_1\overline{x}}$$

Tomando K = 59

Yi

	x	y	(K-y)/y	LN((K-y)/y)	x^2	x*Y
	1	9,5	5,2105263	1,6506809	1	1,6506809
	2	14,2	3,1549296	1,1489662	4	2,2979323
	3	18,75	2,1466667	0,7639163	9	2,2917488
	.	….	….	….	.	….
	.	….	….	….	.	….
	.	….	….	….	.	….
	23	57	0,0350877	-3,349904	529	-77,04779
	24	57,4	0,0278746	-3,580041	576	-85,92098
	25	57,9	0,0189983	-3,963407	625	-99,08518
Sumatorias	325			-28,3327	5525	-630,7677
Promedios	**13**			**-1,133308**		

Utilizando las expresiones para a_1 y a_0:

a_1 =	-0,201879
LN a_0 =	1,4911183
a0 =	4.442

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$S_R = (LnY_i - Lna_0 - a_1 x_i)^2 \qquad S_T = (LnY_i - \overline{LnY})^2$$

	SR	ST
	0,13064	7,7505938
	0,0037953	5,2087752
	0,0147781	3,5994597
	…	…
	…	…
	…	…
	0,0391275	4,9132984
	0,0511051	5,986501
	0,1660986	8,0094617
Sumatorias	**0,9708447**	**53,952485**

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}} = \sqrt{\frac{53.952485 - 0.9708447}{53.952485}} = 0.990961$$

Por lo que el modelo Logístico correspondientes es:

$$y = \frac{59}{1 + 4.442 * e^{-0.2018x}}$$

Ajuste al modelo de Gompertz

Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = K * e^{-a_0 * e^{a_1 x}}$$

Aplicando logaritmos y sus propiedades, se tiene que

$$Ln\left(Ln\left(\frac{K}{y}\right)\right) = Lna_0 + Lne^{-a_1 x}$$

Haciendo $Y = Ln\left(Ln\left(\frac{K}{y}\right)\right)$ se tiene que $Y = Lna_0 - a_1 x$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, se pueden calcular a_1 y a_0 de la manera siguiente

$$-a_1 = \frac{n\sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad Lna_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{x}$$

Tomando K = 59

	x	y	K/y	Ln(K/y)	Ln(Ln(K/y))	x*Y	x^2
	1	9,5	6,2105263	1,8262456	0,6022623	0,6022623	1
	2	14,2	4,1549296	1,4242955	0,3536773	0,7073546	4
	3	18,75	3,1466667	1,1463437	0,1365775	0,4097324	9
	..	….	….	….	….	….	…
	..	….	….	….	….	….	…
	..	….	….	….	….	….	…
	23	57	1,0350877	0,0344862	-3,367197	-77,44552	529
	24	57,4	1,0278746	0,0274931	-3,593819	-86,25165	576
	25	57,9	1,0189983	0,0188201	-3,972832	-99,3208	625
Suma	325	1012,9	45,163274	11,548783	-34,54307	-670,1141	5525
Prom	**13**				**-1,381723**		

Utilizando las expresiones para a_1 y a_0:

-a1 =	0,1700417
Ln a0 =	0,8288199
a0 =	2,2906141

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$S_R = \sum (Y_i - Lna_0 - a_1 x_i)^2 \qquad S_T = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

SR	ST
0,003194	3,9361963
0,018241	3,0116129
0,0331667	2,3052353

…..	…..
…..	…..
…..	…..
0,0812573	3,9421073
0,1167158	4,8933691
0,3031697	6,7138477
1,1730865	38,761537

$$r = \frac{\sqrt{S_T - S_R}}{S_T} = \sqrt{\frac{38.7615 - 1.1730}{38.7615}} = 0.9847$$

Por lo que el modelo de Gompertz correspondientes es:

$$y = 59 * e^{-2.2906 * e^{-0.17x}}$$

Ajuste de los datos al modelo de Brody

Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = K - a_0 * e^{-a_1 x}$$

Aplicando logaritmos y sus propiedades, se tiene que:

$$Ln(K - y) = Lna_0 - a_1 x$$

Haciendo $Y = Ln(K - y)$ $\quad se\ tiene\ que\ Y = Lna_0 - a_1 x$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, se pueden calcular a_1 y a_0 de la manera siguiente

$$a_1 = -\frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad Lna_0 = \overline{Y} - a_1 \overline{x}$$

Tomando K = 59

x	y	K - y	Y Ln(K-y)	x*Y	x^2
1	9,5	49,5	3,9019727	3,9019727	1
2	14,2	44,8	3,8022081	7,6044163	4
3	18,75	40,25	3,69511	11,08533	9
..	….	….	….	….	..
..	….	….	….	….	..
..	….	….	….	….	..
23	57	2	0,6931472	15,942385	529

24	57,4	1,6	0,4700036	11,280087	576
25	57,9	1,1	0,0953102	2,3827545	625
325			**62,056953**	**619,05668**	**5525**
13			**2,4822781**		

Utilizando las expresiones para a_1 y a_0:

a_1 =	0,1443721
Ln a_0 =	4,3591153
a_0 =	78,187933

Para determinar el coeficiente de correlación se debe calcular S_R y S_T:

$$S_R = \sum (Y_i - Lna_0 - a_1 x_i)^2 \qquad S_T = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

SR	ST
0,0978254	2,0155326
0,0719114	1,7422152
0,0533098	1,4709611
....	....
....	....
....	....
0,1193081	3,2009896
0,17993	4,0492487
0,428374	5,697616
1,7336418	**28,829933**

$$r = \frac{\sqrt{S_T - S_R}}{S_T} = \sqrt{\frac{28.8299 - 1.7336}{28.8299}} = 0.9694$$

Por lo que el modelo de Brody correspondientes es:

$$y = 59 - 78.1879 * e^{-0.1443x}$$

Ajuste al modelo de Saturación

Para el análisis numérico tomaremos el modelo de la forma

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x} \quad \frac{a_1 + x}{a_0 x} = \frac{1}{y}$$

Mediante la utilización de las propiedades de la igualdad se tiene que:

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{1}{a_0}$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{n\sum \frac{1}{x_i}\frac{1}{y_i} - \sum \frac{1}{x_i}\sum \frac{1}{y_i}}{n\sum \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 - \left(\sum \left(\frac{1}{x_i}\right)\right)^2}$$

$$\frac{1}{a_0} = \overline{\left(\frac{1}{y_i}\right)} - \frac{a_1}{a_0}\overline{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Por comparación con la ecuación lineal y = mx + b, en la que la pendiente es a_1/a_0 y la ordenada al origen es $1/a_0$

	x	y	1/x	1/y	(1/x)(1/y)	(1/x)^2
	1	9,5	1	0,105263158	0,105263158	1
	2	14,2	0,5	0,070422535	0,035211268	0,25
	3	18,75	0,333333333	0,053333333	0,017777778	0,111111111
	…	……	…….	…….	…….	…….
	…	……	…….	…….	…….	…….
	…	……	…….	…….	…….	…….
	23	57	0,043478261	0,01754386	0,000762777	0,001890359
	24	57,4	0,041666667	0,017421603	0,0007259	0,001736111
	25	57,9	0,04	0,017271157	0,000690846	0,0016
Suma =	**325**	**1012,9**	**3,815958178**	**0,765479229**	**0,215129749**	**1,605723404**
Promedio =			**0,152638327**	**0,030619169**		

a1/a0 = 0,096053881

$$S_R = \sum \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{a_0} - \frac{a_0}{a_1 * x_1}\right)^2$$

1/a0 = 0,015957665

a0 = 62,66580804

$$S_T = \sum \left(\frac{1}{y_i} - \overline{\frac{1}{y}}\right)^2$$

a1 = 6,019294062

SR	ST
4,55407E-05	0,005571725
4,14469E-05	0,001584308
2,8705E-05	0,000515933
…….	…….
…….	…….
…….	…….
6,70842E-06	0,000170964

6,44301E-06	0,000174176
6,39414E-06	0,000178169
0,000218431	0,009659402

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}} = \mathbf{0.9886287}$$

Por lo que el modelo de Saturación correspondientes es:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x} = 62.6658 \frac{x}{6.019294 + x}$$

Conclusiones:
El proceso de análisis del ajuste de datos utilizando análisis numérico permite obtener una representación matemática precisa del crecimiento, lo que es fundamental para la comprensión de los procesos biológicos subyacentes y para la toma de decisiones en la gestión de recursos.

Para cada uno de los modelos seleccionados para el desarrollo del trabajo se realizó el análisis numérico de los datos disponibles ajustándolos a los datos del bagre de canal, en cada uno de ellos se calcularon los parámetros destacando que en los primeros se tomó con base en la tendencia de los datos el valor de la asíntota superior, en el último esto no es necesario ya que el modelo no se representa en términos del crecimiento máximo, en todos se evaluó el coeficiente de correlación, como se muestra a continuación:

Modelo	Coeficiente de correlación r
Logístico	r = 0.990961
Gompertz	r = 0.9847
Brody	r = 0.9694
De Saturación	r = 0.9886

Finalmente queda pendiente la interpretación los parámetros estimados de los modelos en términos biológicos y evaluar su coherencia con el conocimiento existente sobre el crecimiento del organismo o población en estudio, trabajo que deberá realizarse por expertos en la biología pesquera.

La elección del modelo más adecuado depende de los objetivos específicos del estudio, la disponibilidad de datos y la complejidad requerida del modelo.

Referencias:
Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Burnham, K.P., D.R. Anderson. 2002. Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach. Springer. 2nd Ed. New York, N.Y. 488p.

Cadima, E.L. 2003. Manual de evaluación de recursos pesqueros. Documento

Técnico de Pesca. No. 393. Roma, FAO. 162p.

Cailliet, G.M., W.D. Smith, H.F. Mollet, K.J. Goldman. 2006. Age and growth studies of chondrichthyan fishes: the need for consistency in the terminology, verification, validation, and growth function fitting. Environmental Biology of Fishes. 77: 211-228.

Cruz-Vásquez, R., G. Rodríguez-Domínguez, E. Alcántara-Razo, E.A. Aragón-Noriega. 2012. Estimation of individual growth parameters of the Cortes geoduck Panopea globosa from the central Gulf of California using a multimodel approach. Journal of Shellfish Research. 31(3): 725-732.

Gulland, J.A. 1983. Fish stock assessment. Chichester: FAO/John Wiley and Sons. 1: 223p.

Lombardero, A. (2014). *Un vistazo a la Biomatemática*. Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Volumen 86, pp 29 – 38. Recuperada el 16 de marzo de 2024 de: https://drive.google.com/file/d/1U70XAlGHsN2g9rTalwzqtXp_6v8K1Xgc/view

Moreau, J. 1987. Mathematical and biological expression of growth in fishes: recent trends and further developments. In: Summerfelt RC, Hall GE (eds) Age and growth of fish. Iowa State University Press, Ames. Pp. 81–113.

Ortega, D. (2000). *Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Agronomía*, Tesis (en opción al título de Master en Ciencias Pedagógicas), UCLV, Santa Clara, Cuba, 2000.

Ricker, W.E. 1979. Growth rates and models. In: Hoar, W.S., Randall, D.J., Brett, J.R. (eds.). Fish Physiology. Academic Press, New York. Pp. 677–743.

Ulloa, J., Arrieta, J. (2011). *La deconstrucción de la modelación del crecimiento de microalgas*. En Lestón, L (Eds), Acta Latinoamericanas de Matemática Educativa 24 (pp- 739 – 746). México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Ulloa, J., Arrieta, J. (2012). La deconstrucción como diseño didáctico para la modelación. En Flores, R (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25 (pp. 889 - 895). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Ulloa, J.; Rodríguez, J. 2013. La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. Revista Electrónica de Veterinaria REDVET®. España Veterinaria.org ® - Comunidad Virtual Veterinaria.org ® - Veterinaria Organización S.L. Disponible en http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n020213.html.

Ulloa, J.; Uribe, N.; Flores, J.; Ortega, M. (2023). Comparación de los modelos de Johnson, Logístico y de Saturación para representar el Crecimiento de Bagre de canal (Ictalurus punctatus). Acta Pesquera, Vol. 9. No. 18.

Scientific Indexing Services

DRJI Directory of Research Journal Indexing

Google Scholar