

**Comparación de los modelos de Johnson, Logístico y de Saturación para representar el Crecimiento de Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*)**

**Comparison of Johnson, Logistic and Saturation models to represent the Growth of Channel Catfish (*Ictalurus punctatus*)**

José Trinidad Ulloa Ibarra<sup>1</sup>, Nidia D. Uribe Iivares<sup>2</sup>, Juan Felipe Flores Robles<sup>1</sup>, María Inés Ortega Arcega<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Nayarit

<sup>2</sup> CBETIS 100

**Recibido:** 13/10/2023

**Aceptado:** 29/11/2023

**DOI:** 10.60113/ap.v9i18130

**Resumen.**

El bagre de canal (*Ictalurus punctatus*) es una especie de pez de agua dulce que se encuentra en América del Norte. Puesto que es comercialmente importante, y su cultivo se ha incrementado en los últimos años, se considera necesario poder realizar predicciones sobre su crecimiento y desarrollo con base en modelos matemáticos. El crecimiento del bagre de canal es un proceso complejo que está influenciado por una serie de factores, incluyendo la temperatura, la alimentación, y la densidad de población, como ya es conocido, no se debe olvidar que un modelo es una representación simplificada de la realidad, pero su utilización aporta buenos resultados ya que el desarrollo de modelos que puedan predecir su crecimiento es importante para la gestión de su cultivo. En este artículo, se comparan los modelos de Johnson, Logístico y de Saturación para representar el crecimiento del bagre de canal. Estos son modelos no lineales que han sido utilizados para describir el crecimiento de una variedad de especies de peces. Son ecuaciones diferenciales que representan crecimientos sigmoidales. Los datos se obtuvieron de un estudio realizado en México y fueron utilizados para ajustar los parámetros de los modelos. Los resultados del ajuste mostraron que los tres se ajustan bien a

los datos. Sin embargo, el de Saturación se ajusta ligeramente mejor que los otros. Se ha comprobado que el modelo de Saturación tiene algunas ventajas sobre los otros, es más flexible que el logístico, ya que su parámetro  $n$  permite controlar la forma de la curva de crecimiento por lo que puede ser utilizado para predecir el crecimiento del bagre a lo largo de un rango de condiciones de temperatura y alimentación por lo que puede ser utilizado para mejorar la gestión del cultivo del bagre y para optimizar la producción de esta especie.

**Palabras clave:** bagre de canal, crecimiento, modelo de Johnson, modelo logístico, modelo de saturación

**Abstract**

The channel catfish (*Ictalurus punctatus*) is a species of freshwater fish found in North America. Since it is commercially important, and its cultivation has increased in recent years, it is considered necessary to be able to make predictions about its growth and development based on mathematical models. The growth of channel catfish is a complex process that is influenced by a number of factors, including temperature, feeding, and population density. As is already known, it should not be forgotten that a model is a simplified representation of reality, but its use provides good results since the development of models that can predict its growth is important for the management of its crop. In this article, the Johnson, Logistic, and Saturation models are compared to represent channel catfish growth. These are nonlinear models that have been used to describe the growth of a variety of fish species. They are differential equations that represent sigmoidal growth. The data were obtained from a study carried out in Mexico and were used to adjust the parameters of the models. The fitting results showed that all three fit the data well. However, the Saturation one fits slightly better than the others. It has been proven that the Saturation model has some advantages over the others, it is more flexible than the logistic one, since its parameter  $n$  allows controlling the shape of the growth curve, so it can be used to predict the growth of catfish over time. over a

range of temperature and feeding conditions so it can be used to improve the management of catfish farming and to optimize the production of this species.

**Key words:** channel catfish, growth, Johnson model, logistic model, saturation model

### Introducción

El modelo más utilizado en el estudio del crecimiento de peces el modelo de von Bertalanffy considerándolo a priori como el único modelo que se ajusta a los datos de longitud-edad de las especies; una consideración que genera incertidumbres en los valores de los parámetros de crecimientos que son estimados, por cuanto se sabe que existen otros modelos de crecimiento que podrían ajustarse igualmente a los datos de longitud-edad (González, 2023, Ulloa et al, 2022)

El bagre es una especie de pez de agua dulce que se encuentra en América del Sur, América Central y México. Es una especie comercialmente importante, y su cultivo se ha incrementado en los últimos años. El crecimiento del bagre es un proceso complejo que está influenciado por una serie de factores, incluyendo la temperatura, la alimentación, y la densidad de población.

El bagre de canal es una especie de bagre nativo de América del Norte. Es una especie popular en la acuicultura y se cultiva en todo el mundo. El crecimiento del bagre de canal es rápido. En condiciones óptimas, los bagres de canal pueden alcanzar una longitud de 1 metro y un peso de 25 kilogramos en dos años. El bagre es un pez de agua dulce que se encuentra en todo el mundo. Es una especie importante en la pesca comercial y recreativa. El crecimiento del bagre varía según la especie, la temperatura del agua y la disponibilidad de alimento.

El cultivo de bagre inicio su desarrollo hace más de cincuenta años en forma experimental y algunas pequeñas granjas empezaron a operar a principios de la década de los cincuenta, el cultivo comercial en una escala significativa no va más allá de 1963, cuando se produjeron algunas toneladas principalmente en Arkansas, EU., para 1966 ya se producía 11, 000 toneladas, y en 1969 30,000 tone-

ladas en los estados de Arkansas, Mississipi y Luisiana y en otros quince estados de la unión americana.

En México los antecedentes del cultivo se remontan a las experiencias de las granjas de Rosario en Sinaloa, Tancol y Miguel Alemán en Tamaulipas desde la década de los setenta. Existen 3 familias de bagres nativos, de la familia Ictaluridae la de mayor importancia comercial. La especie más importante para la acuicultura del país es *Ictalurus punctatus* nativo de la cuenca del río Bravo al norte del país, habita en aguas de presas, lagos y ríos caudalosos con fondo de grava o arena. Sin embargo, la línea genética de bagre que actualmente se cultiva se importó de los Estados Unidos de Norte América (Ceballos y Velásquez, 1988).

### Aspectos biológicos y ecológicos del recurso

El nombre científico del bagre de canal es *Ictalurus punctatus*. Es una especie de pez de agua dulce de la familia Ictaluridae, orden Siluriformes. Es nativo de América del Norte, donde se encuentra en ríos, lagos y embalses.

El bagre de canal es una especie popular en la acuicultura y se cultiva en todo el mundo. Es un pez de rápido crecimiento y puede alcanzar una longitud de hasta 1 metro y un peso de hasta 25 kilogramos. Cuerpo cilíndrico sin escamas en la piel; puntos sobre los costados figura 1. Los rayos de las aletas son blandos con excepción de las aletas dorsal y pectoral que tienen espinas. Aleta adiposa presente. Barbillas ubicadas en los extremos bajo boca, con dos barbillas sobre la superficie dorsal de la cabeza delante de los ojos y detrás del hocico. Aleta caudal profundamente bifurcada y aleta anal curvada con 24-29 rayos.

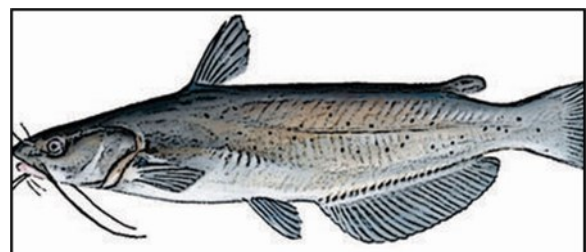


Figura No. 1. Bagre de Canal

Los bagres son nativos de aguas que fluyen en ambientes templados dentro de Norte América, incluyendo el sur de Canadá y el norte de México. Los adultos desovan por primera vez a los dos o tres años. El desove en la naturaleza ocurre en la primavera, comenzando alrededor de marzo en la parte sur de la distribución geográfica y más tarde en la medida que aumenta la latitud. Los huevos son depositados a menudo bajo troncos caídos o en algún tipo de depresión natural. Los huevos son puestos en una masa adhesiva. Las hembras de 0,5-1,8 kg producen un promedio de 8 800 huevos/kg de peso corporal, con hembras más grandes produciendo un promedio de 6 600 huevos/kg. Una vez que los huevos son puestos y fertilizados, el macho persigue y expulsa a la hembra del área del nido y atiende los huevos ventilando la masa con sus aletas para mantener agua oxigenada moviéndose sobre ellos. Dependiendo de la temperatura, los huevos eclosionarán dentro de 5-10 días y el macho continuará protegiendo por varios días a las larvas con saco hasta que los sacos vitelinos son absorbidos y las crías son capaces de nadar alrededor en busca de alimento.

Los bagres son conocidos como omnívoros oportunistas dado que ellos se alimentarán de una amplia variedad de material vegetal y animal; esto es, virtualmente de cualquier cosa que esté disponible.

Hay por lo menos 39 especies de bagre en Norteamérica y México, pero solamente 7 se han cultivado o tienen potencial para la producción comercial:

Bagre azul, *furcatus ictalurus*

Bagre blanco, *catus ictalurus*

Bagre negro, *melas ictalurus*

Bagre marrón, *nebulosus ictalurus*

Bagre amarillo, *natalis ictalurus*

Bagre de cabeza llana: *olivaris Pylodictis*

Bagre de canal: *Ictalurus Punctatus*

Clasificación taxonómica:

GENERO: *Punctatus*

CLASE: *Osteichthyes*

ORDEN: *Siluriformes*

FAMILIA: *Ictaluridae*

PHYLUM: *Chordate*

Descripción de la especie:

Es generalmente delgado y sobre todo gris azulado  
Los lados pueden ser azules o plateados ligeramente con los puntos negros  
dispersos, y el vientre es blanco  
Tiene una cabeza plana grande con los ojos grandes  
Presentan ocho barbas alrededor de su boca  
Cola profundamente bifurcada

Hábitos

Es omnívoro come casi cualquier materia, moluscos, pájaros muertos, ranas, insectos, gusanos, plantas acuáticas, algas, semillas que caigan en el agua, siendo las barbas la herramienta para encontrar el alimento.

Su alimentación es más activa en la noche y una hora después de la salida del sol o dos horas antes de la puesta del sol.

Se encuentra generalmente en fondos con preferencia de fango, grava, escombros, arena y se encuentra raramente entre algunas hierbas acuáticas densas.

El estudio del crecimiento del bagre es importante para la gestión de su cultivo. Los modelos de crecimiento pueden ayudar a los productores de bagre a predecir el crecimiento de los peces, y a optimizar la producción. El bagre es una especie de pez de agua dulce que se encuentra en América del Sur, América Central y México. Es una especie comercialmente importante, y su cultivo se ha incrementado en los últimos años. El crecimiento del bagre es un proceso complejo que está influenciado por una serie de factores, incluyendo la temperatura, la alimentación, y la densidad de población.

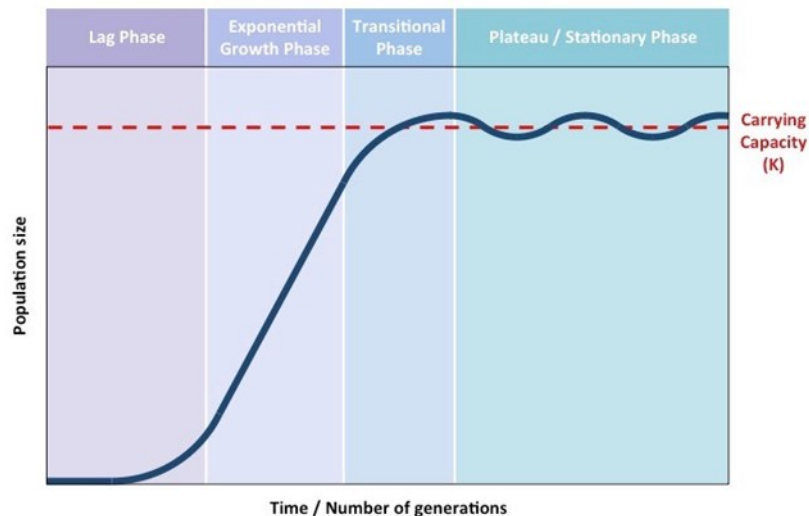
En general, el crecimiento del bagre se puede describir como una función exponencial. La velocidad de crecimiento aumenta a medida que el pez se hace más grande. Los factores que influyen en el crecimiento del bagre incluyen la temperatura del agua, la disponibilidad de alimento y la densidad de población.

Es esencial comprender el significado de un patrón o función sigmoidea, independientemente de si construyes tu propia red neuronal o construyes un modelo de crecimiento de la levadura. El aprendizaje de problemas complejos se explica por la función sigmoidea y las curvas de crecimiento.

Es importante tener en cuenta que muchos organismos pasan por varias fases distintas de crecimiento durante su vida. Una variable de tamaño o peso medible a lo largo del tiempo puede servir para cuantificar esos patrones.

Un patrón sigmoide se observa comúnmente en

condiciones que son generalmente consistentes, y donde una variable aumenta sucesivamente exponencialmente, luego linealmente, y por último asintóticamente. Cuando se traza una curva en forma de S, o una función sigmoide, se puede ver. En la figura 2.



**Figura No.2** Curva Sigmoide

Debido a la monotonidad, continuidad y diferenciación de la función sigmoide, junto con su derivada, es sencillo formular y actualizar las ecuaciones para el aprendizaje de los diferentes parámetros.

Una posible trayectoria de crecimiento se representa mediante una curva S al trazar el tamaño de una población frente al tiempo. Para entender el ciclo de vida de un organismo, hay que tener en cuenta este aspecto. Además, las funciones sigmoide pueden emplearse en las redes neuronales para modelar funciones de decisión complejas, ya que las funciones no lineales dan lugar a límites no lineales.

#### **Un patrón sigmoide consta de tres etapas**

La curva tendrá tres fases principales: una etapa/ período acelerado, una etapa/ período de transición y una etapa/ período de meseta.

##### **Etapla exponencial**

En las primeras etapas, el crecimiento de la población sería relativamente lento (período de retraso), ya que pocos individuos reproductores estarían

ampliamente dispersos. Como la natalidad supera a la mortalidad, el tamaño de la población crece constantemente. La energía es abundante y la resistencia al clima es mínima, lo que se traduce en una baja tasa de mortalidad.

##### **Etapla de transición**

Debido al crecimiento de la población, los recursos se vuelven más escasos, lo que provoca una lucha por la supervivencia. Se produce una ralentización del crecimiento de la población como consecuencia de la disminución de las tasas de natalidad y el aumento de las tasas de mortalidad.

##### **Etapla de meseta**

Con el tiempo, la creciente tasa de mortalidad igualará la producción de nuevos organismos, por lo que el crecimiento de la población se estabilizará. Como resultado de las fuerzas restrictivas, la población ha superado la capacidad del medio ambiente para hacer frente al aumento. Es probable que el tamaño de la población no sea estable en este punto, sino que fluctúe en torno a la capacidad de carga para mantener un número uniforme.



### **El problema**

La modelación es una práctica que se ejerce en diversas comunidades entre otras en las ciencias del mar y es una actividad recurrente y les otorga identidad, con base en diferentes estudios consideramos que puede funcionar como un vínculo entre la escuela y su entorno. Para ello se realizan investigaciones sobre las prácticas de modelación de comunidades, en este caso, de profesionales de la pesca. Las prácticas de esta comunidad se encuentran constituidas, y como tal, al igual que otros muchos procesos se realizan de forma casi mecánica o algorítmica, (Ulloa y Arrieta, 2012).

**El modelo de Johnson** es un modelo de crecimiento no lineal que se utiliza para describir el crecimiento de una población, tiene las siguientes suposiciones:

- El crecimiento es casi exponencial hasta que la población alcanza un tamaño máximo.
- El tamaño máximo de la población es constante.

La tasa de crecimiento de la población es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual de la población y el tamaño máximo.

### **Debilidades y limitaciones en su utilización en especies marinas**

El modelo de Johnson es un modelo general que puede ser utilizado para describir el crecimiento de una variedad de especies de peces. Sin embargo, el modelo tiene algunas debilidades y limitaciones que pueden limitar su utilidad en especies marinas. Una de las debilidades del modelo de Johnson es que asume que el tamaño máximo de la población es constante. En el caso de especies marinas, el tamaño máximo de la población puede variar en función de factores como la temperatura, la salinidad, y la disponibilidad de alimento.

Otra debilidad del modelo de Johnson es que asume que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual de la población y el tamaño máximo. En el caso de

especies marinas, la tasa de crecimiento de la población puede estar influenciada por otros factores, como la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.

Por estas razones, el modelo de Johnson debe utilizarse con precaución en especies marinas. El modelo puede ser utilizado para proporcionar una estimación general del crecimiento de la población, pero es importante considerar las debilidades y limitaciones del modelo al interpretar los resultados.

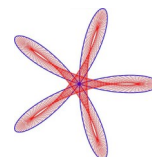
### **Específicamente, en el caso de especies marinas, el modelo de Johnson puede tener las siguientes limitaciones:**

- El tamaño máximo de la población puede variar en función de la temperatura del agua.
- La tasa de crecimiento de la población puede verse afectada por la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.

El modelo puede no ser adecuado para describir el crecimiento de especies marinas que experimentan cambios estacionales en su crecimiento.

En general, el modelo de Johnson es una herramienta útil para describir el crecimiento de especies marinas. Sin embargo, es importante ser consciente de sus debilidades y limitaciones al interpretar los resultados.

El modelo más común de crecimiento de saturación es el modelo logístico, que se describe mediante una ecuación diferencial que relaciona la tasa de cambio de la población con la población misma y su capacidad de carga. El modelo logístico ha sido ampliamente utilizado para describir el crecimiento de poblaciones biológicas, como células, bacterias, plantas y animales, así como para modelar el crecimiento de la economía y las ventas de productos.



### Modelo logístico:

El modelo logístico es uno de los modelos más utilizados para describir el crecimiento de una población que alcanza su capacidad de carga. Se puede representar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Donde:

- $dN/dt$  es la tasa de cambio de la población con respecto al tiempo.
- $N$  es la población en un momento dado.
- $r$  es la tasa intrínseca de crecimiento de la población.

$K$  es la capacidad de carga del ambiente, es decir, el tamaño máximo de la población que el ambiente puede sostener.

Suposiciones más comunes en la determinación del modelo logístico

El modelo logístico es uno de los modelos más utilizados para describir el crecimiento de una población que alcanza su capacidad de carga. Algunas de las suposiciones más comunes en la determinación del modelo logístico son:

1. La población crece de forma exponencial hasta alcanzar su capacidad de carga: El modelo logístico asume que la población crece de forma exponencial al principio, cuando los recursos son abundantes, y que luego la tasa de crecimiento disminuye a medida que la población se acerca a su capacidad de carga.
2. La capacidad de carga es constante: El modelo logístico supone que la capacidad de carga del ambiente es constante, es decir, que no cambia a lo largo del tiempo. En la realidad, la capacidad de carga puede variar debido a factores como el cambio climático, la alteración del hábitat y la introducción de especies invasoras.
3. No hay factores limitantes adicionales: El modelo logístico asume que la capacidad de carga del ambiente es el único factor limitante para el crecimiento de la población. En la realidad, puede haber otros factores limitantes, como la predación, la competencia por recursos y las enfermedades.
4. Las tasas de natalidad y mortalidad son constantes: El modelo logístico supone que las tasas de

natalidad y mortalidad son constantes a lo largo del tiempo. En la realidad, estas tasas pueden variar debido a factores como la edad, el sexo, la densidad de la población y las condiciones ambientales.

La población es homogénea: El modelo logístico supone que la población es homogénea y que todos los individuos tienen las mismas tasas de natalidad y mortalidad. En la realidad, las poblaciones pueden estar compuestas por diferentes grupos de edad y sexo, con diferentes tasas de natalidad y mortalidad.

Debilidades y limitaciones del modelo logístico

El modelo logístico, como cualquier otro modelo estadístico, tiene sus propias limitaciones y debilidades. Algunas de las debilidades comunes del modelo logístico son:

1. Linealidad: El modelo logístico asume que la relación entre la variable de respuesta y las variables predictoras es lineal. Esto puede ser una limitación en casos donde la relación no es lineal.
2. Supuestos de independencia: El modelo logístico asume que las observaciones son independientes entre sí. Esto puede ser una debilidad en casos donde las observaciones están correlacionadas, como en estudios de grupos o de datos longitudinales.
3. Dependencia de las variables predictoras: El modelo logístico asume que las variables predictoras son independientes entre sí. En casos donde hay dependencia entre las variables predictoras, el modelo puede ser inexacto.
4. Ausencia de variables relevantes: El modelo logístico se basa en las variables predictoras que se incluyen en el modelo. Si hay variables importantes que no se incluyen en el modelo, entonces el modelo puede ser inexacto.
5. Sensibilidad a valores atípicos: El modelo logístico es sensible a valores atípicos en los datos. Si hay valores atípicos en los datos, entonces el modelo puede ser inexacto.
6. Problemas de convergencia: El modelo logístico puede tener problemas de convergencia cuando los datos son muy complejos o hay pocas observaciones por categoría.

### El Modelo de Saturación

De manera general se puede decir que el modelo de saturación es un modelo de crecimiento no lineal que se basa en la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = r * \left(\frac{x}{K}\right)^n$$

donde:

x es el tamaño del bagre de canal en un momento dado

t es el tiempo

r es la tasa de crecimiento intrínseca

K es la capacidad de carga del ecosistema

n es un parámetro que controla la forma de la curva de crecimiento

El modelo de saturación tiene las siguientes características:

El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que el bagre de canal alcanza un tamaño máximo.

El tamaño máximo del bagre de canal es igual a la capacidad de carga del ecosistema.

La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.

El parámetro n controla la forma de la curva de crecimiento. Un valor de n menor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más pronunciada, mientras que un valor de n mayor a 1 da como resultado una curva de crecimiento más suave.

El modelo de saturación tiene las siguientes suposiciones:

El crecimiento es exponencial al principio, pero luego se ralentiza hasta que la población alcanza un tamaño máximo.

El tamaño máximo de la población es igual a la capacidad de carga del ecosistema.

La forma de la curva de crecimiento depende del parámetro n.

Debilidades y limitaciones en su utilización en especies marinas

El modelo de saturación es una herramienta útil para describir el crecimiento de una variedad de poblaciones, incluyendo especies marinas. Sin embargo, el modelo tiene algunas debilidades y limitaciones que deben ser consideradas al utilizarlo

en especies marinas.

Una de las debilidades del modelo de saturación es que asume que el tamaño máximo de la población es constante. En el caso de especies marinas, el tamaño máximo de la población puede variar en función de factores como la temperatura, la salinidad, y la disponibilidad de alimento.

Otra debilidad del modelo de saturación es que asume que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual de la población y el tamaño máximo. En el caso de especies marinas, la tasa de crecimiento de la población puede estar influenciada por otros factores, como la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.

Por estas razones, el modelo de saturación debe utilizarse con precaución en especies marinas. El modelo puede ser utilizado para proporcionar una estimación general del crecimiento de la población, pero es importante considerar las debilidades y limitaciones del modelo al interpretar los resultados.

Específicamente, en el caso de especies marinas, el modelo de saturación puede tener las siguientes limitaciones:

- El tamaño máximo de la población puede variar en función de la temperatura del agua.
- La tasa de crecimiento de la población puede verse afectada por la disponibilidad de alimento, la depredación, y las enfermedades.
- El modelo puede no ser adecuado para describir el crecimiento de especies marinas que experimentan cambios estacionales en su crecimiento.

En general, el modelo de saturación es una herramienta útil para describir el crecimiento de especies marinas. Sin embargo, es importante ser consciente de sus debilidades y limitaciones al interpretar los resultados.

Ventajas del modelo de saturación

El modelo de saturación tiene una serie de ventajas que lo convierten en una herramienta útil para describir el crecimiento de una variedad de poblaciones. Estas ventajas incluyen:

- Flexibilidad: el modelo de saturación permite controlar la forma de la curva de crecimiento mediante el parámetro  $n$ . Esto puede ser útil para ajustar el modelo a diferentes poblaciones o para investigar los efectos de diferentes factores en el crecimiento de la población.
- Simplicidad: el modelo de saturación es relativamente simple de entender y aplicar. Esto lo hace una herramienta accesible para científicos y otros usuarios.
- Potencial para la predicción: el modelo de saturación puede ser utilizado para predecir el crecimiento futuro de una población. Esto puede ser útil para la gestión de poblaciones, como la conservación de especies amenazadas o el cultivo de especies comerciales.

### **Antecedentes**

En el ámbito local (Universidad Autónoma de Nayarit), la investigación tiene diversos antecedentes, los principales antecedentes son los trabajos acerca de la modelación como práctica social y las prácticas de análisis de los resultados de la composición de las especies. Uno de los aspectos fundamentales de esta línea de investigación consiste en situar el estudio de las prácticas de modelación en una comunidad, en un lugar y en un tiempo (Ulloa, 2013).

### **Justificación**

La comparación de los tres modelos para el crecimiento del bagre de canal es importante por lo siguiente:

- Los tres modelos son modelos no lineales que han sido utilizados para describir el crecimiento de una variedad de especies de peces.

Estos modelos tienen sus propias fortalezas y debilidades.

La comparación de los tres modelos puede ayudar a los profesionales de la pesca a comprender mejor el crecimiento del bagre de canal. La comparación también puede ayudarles seleccionar el modelo más adecuado para un propósito específico.

En resumen, la comparación de los tres modelos puede proporcionar información sobre los siguientes

aspectos del crecimiento del bagre de canal:

- La forma de la curva de crecimiento
- El tamaño máximo del bagre de canal
- La tasa de crecimiento del bagre de canal

La influencia de los factores ambientales en el crecimiento del bagre de canal

La comparación de los tres modelos también puede ayudar a desarrollar estrategias de manejo para la conservación del bagre de canal. Por ejemplo, si el modelo de Johnson se ajusta mejor a los datos, esto podría indicar que el tamaño máximo del bagre de canal es constante y que la tasa de crecimiento del bagre de canal es proporcional a la diferencia entre el tamaño actual del bagre de canal y el tamaño máximo. Esta información podría utilizarse para desarrollar estrategias de manejo que permitan a los bagres de canal alcanzar su tamaño máximo.

### **Marco Teórico**

Como se ha especificado en trabajos anteriores del grupo de modelación en Nayarit, se toma como base a la teoría Socioepistemológica como el marco ideal ya que se basa en el análisis de las prácticas de las comunidades ya sean de estudio, de práctica o profesionales considerando al grupo social en el que se desarrollan las actividades como el aspecto preponderante para entender la generación del conocimiento.

La Socioepistemología es una teoría que se basa en el estudio de la epistemología de prácticas considerando los aspectos socioculturales ligados a la producción y difusión de conocimiento matemático, así como los aspectos que atañen a los procesos de cognición, de naturaleza didáctica y construcción de dicho conocimiento (Cordero, 2005). En esta teoría se parte del supuesto de que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento, para con ello poder modelar la práctica que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Cordero, 2001).



**Metodología**

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), la investigación es exploratoria, descriptiva y correlacional. El tipo de diseño de la investigación es no experimental, ya que se usarán datos históricos de desembarque de tallas y por otro lado las variables no serán modificadas, sino analizadas mediante métodos y técnicas para la estimación de parámetros

poblacionales. La población de estudio fue la especie “Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*)”

Se realizó un análisis numérico puesto que solo se requieren conocimientos básicos de la aritmética y del álgebra, y además:

- El análisis numérico permite encontrar soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales no lineales.
- Esto permite estimar los parámetros de los modelos de crecimiento logístico y de Johnson a partir de datos experimentales.
- Los datos experimentales pueden ser obtenidos

de una variedad de fuentes.

- Una vez que se han estimado los parámetros de los modelos, se pueden utilizar para predecir el crecimiento futuro de la población.

➤ Es decir, el análisis numérico es una herramienta valiosa para determinar modelos de crecimiento logístico y de Johnson. El análisis numérico permite estimar los parámetros de los modelos a partir de datos experimentales, lo que permite predecir el crecimiento futuro de la población.

En la primera etapa se toma cada uno de los modelos, se linealiza y se hacen los comparativos del original y del linealizado a fin de establecer analogías y con ello poder calcular el coeficiente de correlación.

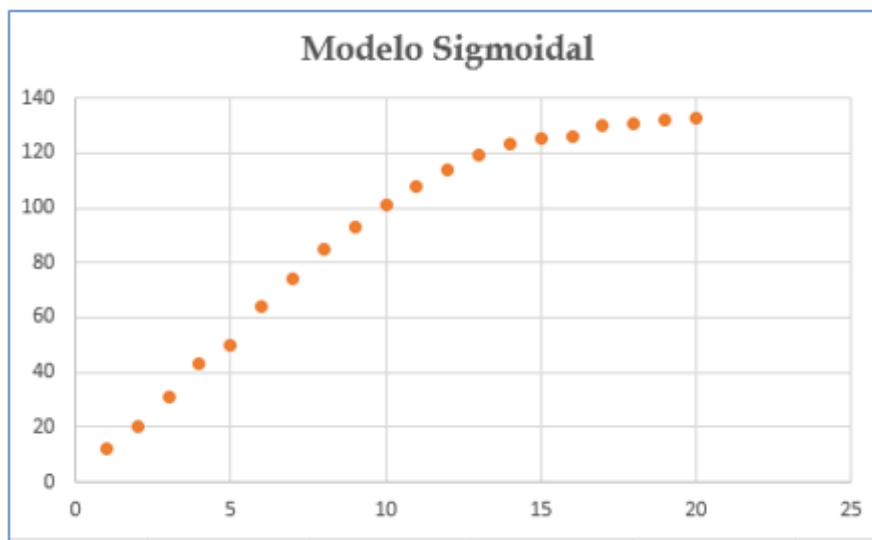
**Resultados**

Datos de crecimiento del Bagre de canal (*Ictalurus punctatus*)

**Tabla 1.** Datos para obtención del modelo

| Edad     | x | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  |
|----------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Longitud | y | 12 | 20 | 31 | 43 | 50 | 64 | 74 | 85 | 93 | 101 | 108 | 114 | 119 | 123 | 125 | 126 | 130 | 131 | 132 | 133 |

Representación gráfica de los datos:



**Figura No. 3.** Datos del Bagre de Canal

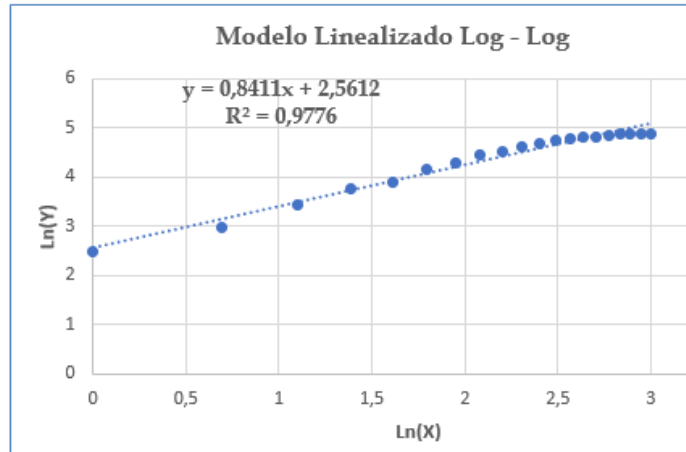


Figura No. 4. Modelo Linealizado Log - Log

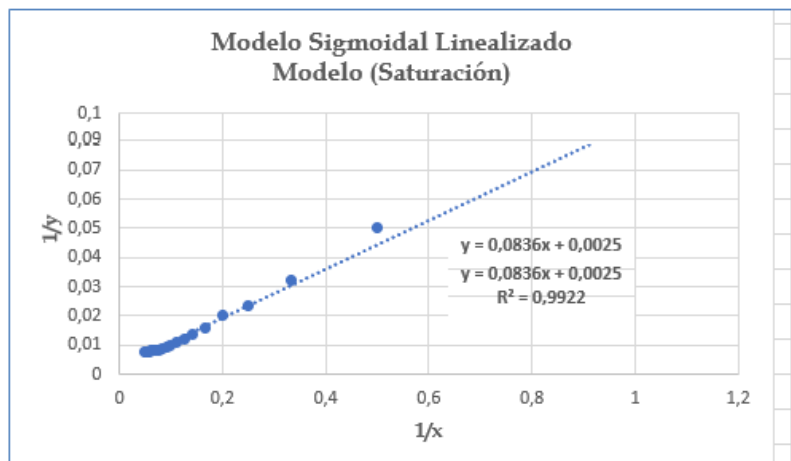


Figura No. 5. Curva linealizada de los datos de Bagre de Canal

La figura No. 5 representa una metodología descrita para los modelos de crecimiento de saturación descrito por Quintana, Villalobos & Cornejo (2005), mismo que se describe de manera analítica a continuación:

La ecuación que caracteriza el crecimiento de la población bajo condiciones limitantes es la siguiente:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x}$$

Al reordenar la ecuación:

$$\frac{a_1 + x}{a_0 x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{1}{a_0}$$

Esta ecuación representa la ecuación de una línea recta en la que la pendiente es  $a_1/a_0$  y la ordenada al origen es  $1/a_0$

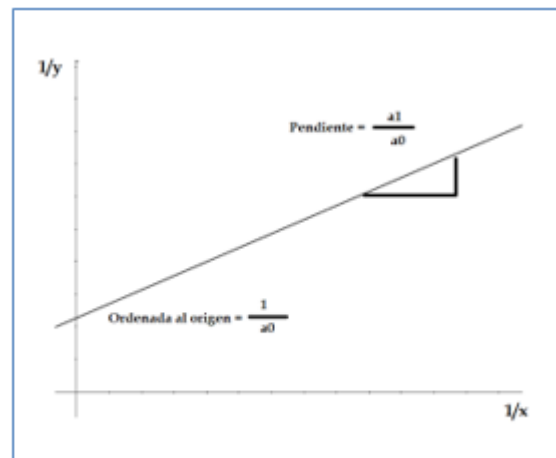


Figura No. 6. Parámetros del modelo linealizado

Comparación de tres modelos de crecimiento para bagre de canal

Al aplicar el método de mínimos cuadrados a la última ecuación se obtienen las siguientes ecuaciones para calcular la pendiente y la ordenada al origen:

Para la pendiente

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{n \sum \frac{1}{x_i} \frac{1}{y_i} - \sum \frac{1}{x_i} \sum \frac{1}{y_i}}{n \sum \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 - \left(\sum \left(\frac{1}{x_i}\right)\right)^2}$$

Para la ordenada al origen

$$\frac{1}{a_0} = \overline{\left(\frac{1}{y_i}\right)} - \frac{a_1}{a_0} \overline{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Además

$$S_R = \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{a_0} - \frac{a_0}{a_1 * x_1}\right)^2$$

$$S_T = \left(\frac{1}{y_i} - \bar{\frac{1}{y}}\right)^2$$

Coefficiente de Determinación

$$r^2 = \frac{S_T - S_R}{S_T}$$

Coefficiente de Correlación:

$$r = \sqrt{\frac{S_T - S_R}{S_T}}$$

Procediendo con lo anterior

| x          | y           | 1/x               | 1/y               | (1/x)(1/y)        | (1/x)^2           |
|------------|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1          | 12          | 1                 | 0,08333333        | 0,08333333        | 1                 |
| 2          | 20          | 0,5               | 0,05              | 0,025             | 0,25              |
| 3          | 31          | 0,33333333        | 0,03225806        | 0,01075269        | 0,11111111        |
| 4          | 43          | 0,25              | 0,02325581        | 0,00581395        | 0,0625            |
| 5          | 50          | 0,2               | 0,02              | 0,004             | 0,04              |
| 6          | 64          | 0,16666667        | 0,015625          | 0,00260417        | 0,02777778        |
| 7          | 74          | 0,14285714        | 0,01351351        | 0,0019305         | 0,02040816        |
| 8          | 85          | 0,125             | 0,01176471        | 0,00147059        | 0,015625          |
| 9          | 93          | 0,11111111        | 0,01075269        | 0,00119474        | 0,01234568        |
| 10         | 101         | 0,1               | 0,00990099        | 0,0009901         | 0,01              |
| 11         | 108         | 0,09090909        | 0,00925926        | 0,00084175        | 0,00826446        |
| 12         | 114         | 0,08333333        | 0,00877193        | 0,00073099        | 0,00694444        |
| 13         | 119         | 0,07692308        | 0,00840336        | 0,00064641        | 0,00591716        |
| 14         | 123         | 0,07142857        | 0,00813008        | 0,00058072        | 0,00510204        |
| 15         | 125         | 0,06666667        | 0,008             | 0,00053333        | 0,00444444        |
| 16         | 126         | 0,0625            | 0,00793651        | 0,00049603        | 0,00390625        |
| 17         | 130         | 0,05882353        | 0,00769231        | 0,00045249        | 0,00346021        |
| 18         | 131         | 0,05555556        | 0,00763359        | 0,00042409        | 0,00308642        |
| 19         | 132         | 0,05263158        | 0,00757576        | 0,00039872        | 0,00277008        |
| 20         | 133         | 0,05              | 0,0075188         | 0,00037594        | 0,0025            |
| <b>209</b> | <b>1814</b> | <b>3,59773966</b> | <b>0,3513257</b>  | <b>0,14257056</b> | <b>1,59616324</b> |
|            |             | <b>0,17988698</b> | <b>0,01756628</b> |                   |                   |

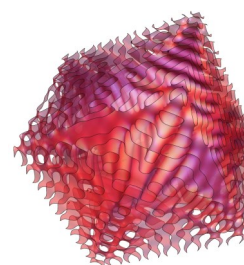
| $(1/y - 1/a_0 - a_0/a_1 x)^2$ | $(1/y - 1/y)^2$    |
|-------------------------------|--------------------|
| 0,000136436                   | 0,009322607        |
| 0,000128193                   | 0,016870628        |
| 2,09031E-05                   | 0,021794298        |
| 1,13545E-06                   | 0,024533323        |
| 1,22603E-06                   | 0,025563847        |
| 1,14363E-06                   | 0,026981999        |
| 2,5942E-06                    | 0,027680131        |
| 4,76017E-06                   | 0,0282651          |
| 5,18849E-06                   | 0,02860641         |
| 5,74439E-06                   | 0,028895238        |
| 5,94838E-06                   | 0,02911382         |
| 5,88858E-06                   | 0,029280361        |
| 5,62852E-06                   | 0,029406632        |
| 5,21377E-06                   | 0,029500433        |
| 4,40749E-06                   | 0,029545135        |
| 3,56493E-06                   | 0,029566966        |
| 3,57149E-06                   | 0,029651006        |
| 3,00341E-06                   | 0,029671232        |
| 2,5537E-06                    | 0,029691158        |
| 2,19466E-06                   | 0,029710791        |
| <b>0,000349299</b>            | <b>0,533651117</b> |

|             |                    |                                      |             |                   |
|-------------|--------------------|--------------------------------------|-------------|-------------------|
| <b>a0 =</b> | <b>175,3545204</b> | <b>Coefficiente de determinación</b> | <b>r² =</b> | <b>0,99934545</b> |
| <b>a1 =</b> | <b>11,56463598</b> | <b>Coefficiente de Correlación</b>   | <b>r =</b>  | <b>0,99934545</b> |

Por lo que el modelo queda representado por la ecuación:

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x} = 175.354 \frac{x}{11.564 + x}$$

Como puede observarse en la figura No. 7 las dos curvas están prácticamente solapadas lo que indica que el modelo propuesto representa con bastante exactitud los datos del problema, esto además queda evidente con la determinación del coeficiente de correlación.





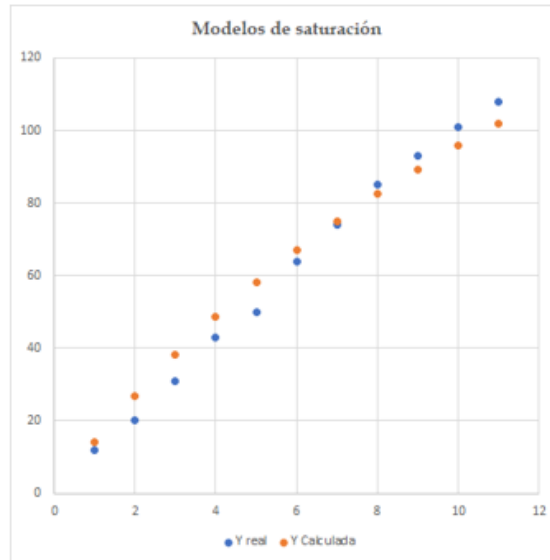


Figura No.7. Gráfico de los datos reales VS datos calculados

Procediendo de igual manera con el procedimiento anterior se tiene lo siguiente:

$$y = \frac{215}{1 + 1.4435 * e^{-0.3374x}}$$

**Modelo Logístico**

$$y = \frac{K}{1 + A * e^{-Bx}}$$

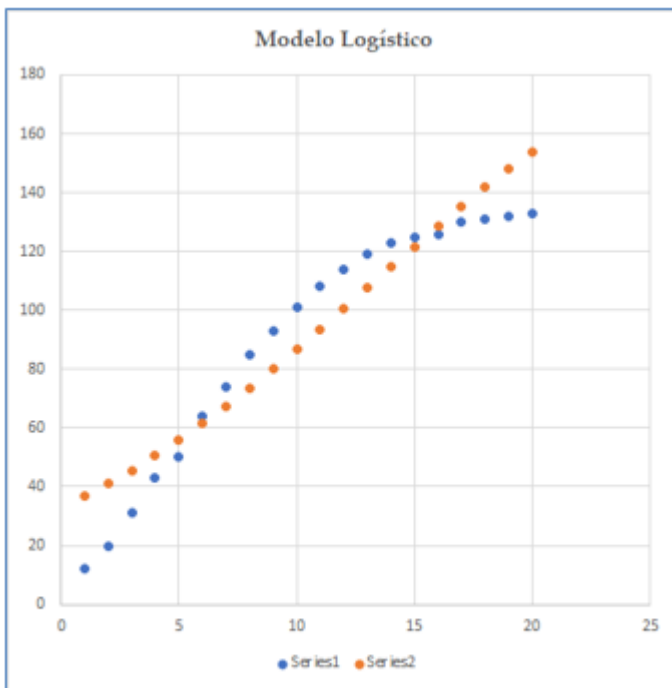
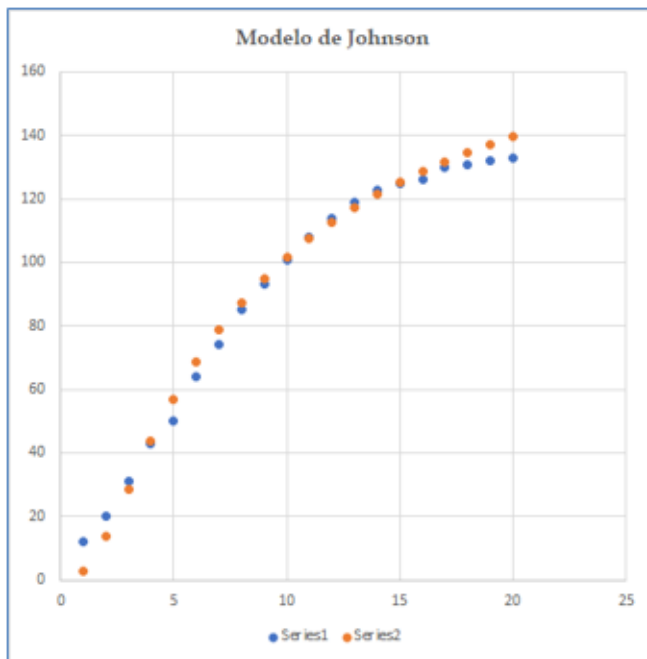


Fig. No. 8.

Coef Determinación = 0,89547974  
 Coef Correlación = 0,94629791

## Modelo de Johnson



$$196.5 e^{\frac{-1}{0.14(x+0.63)}}$$

Coef Determinación = 0,987833323

Coef Correl = 0,993898045

### Discusión

Los resultados del ajuste mostraron que los tres modelos se ajustan bien a los datos. Sin embargo, el modelo de saturación se ajusta ligeramente mejor que los otros dos modelos.

Los resultados de este estudio muestran que el modelo de saturación es una buena opción para representar el crecimiento del bagre de canal. El modelo es flexible y se ajusta bien a los datos. Este modelo puede ser utilizado para mejorar la gestión del cultivo del bagre de canal, y para optimizar la producción de esta especie.

La metodología utilizada para la obtención de los modelos a pesar de ser una herramienta de la ingeniería y las matemáticas la que se utilizó es con base en su facilidad por el tipo de conocimiento requerido. No obstante, y tomando la definición de Coeficiente de Correlación: el valor de  $r$  denota la fuerza de la asociación.

El manejo algorítmico resulta ser más sencillo y rápido ya que la linealización se efectúa por medio de álgebra básica y no requiere el uso de logaritmos, por lo que se considera como una buena opción para profesionales que no tienen una formación fuerte en matemáticas.

### Conclusiones

Cómo lo menciona Ulloa et al, 2021, el grupo de trabajo elabora diferentes propuestas que faciliten la modelación en casos en el que se tiene poca habilidad en el uso de las ecuaciones diferenciales, o en los casos propuestos anteriormente la utilización de los logaritmos, esto sigue otro de los procedimientos utilizados por el grupo: la Deconstrucción (Ulloa, 2013), de los trabajos del área de la pesca y la acuicultura en la que se requiere el uso de la matemática.

### Referencias Bibliográficas

- Ceballos, O.M.L. y Velázquez, E.M.A. (1988). Perfiles de la Alimentación de Peces y Crustáceos en los Centros y Unidades de Producción Acuícola en México. Programa Cooperativo Gubernamental. FAO-Italia. Proyecto AQUILA. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación. Dirección General de Acuicultura, Secretaria de Pesca. México, 139 pp.
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3), 265-286.

- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (2), 103-128
- González-Suárez, Ángel. (2023). Crecimiento del bagre dorado *Brachyplatystoma rousseauxii* en la región del Orinoco Medio usando modelos múltiples. *Revista Biotecnología en el Sector Agropecuario y Agroindustrial*, v. 21, n. 1, 2023, p.97-107. Doi:<https://doi.org/10.18684/rbsaa.v21.n1.2023.2030>
- Hernández, R.; Fernández, C. y Baptisto, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición. McGraw-Hill / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. Santa Fe, México. 634 p.
- Ulloa, J., Arrieta, J. (2012). La deconstrucción como diseño didáctico para la modelación. En Flores, R (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25 (pp. 889 - 895 ). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.
- Ulloa, J. (2013). *Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Distrito Federal, México.
- Ulloa, J.; Uribe, N.; Flores, J.; Ortega, M. (2020). Comparación de cinco modelos de crecimiento para pargo lunarejo *Lutjanus coeruleolineatus* (Rüppell, 1838). *Acta Pesquera*, Vol. 8, No. 15. Universidad Autónoma de Nayarit.
- Ulloa, J.; Ramos, D.; Uribe, N.; Flores, F.; Ortega, M. (2021). Análisis numérico para determinar modelos asociados a la composición proximal de corvina (*Cynoscion Parvipinnis*). *Acta Pesquera*, Vol. 7, No. 13. Universidad Autónoma de Nayarit

