Una alternativa para el estudio del modelo Gompertz

José Trinidad Ulloa Ibarra[1], Jorge Armando Rodríguez Carrillo[2], Jaime L. Arrieta Vera[3]

1. Universidad Autónoma de Nayarit. CetMar No. 26
2. CetMar Zihutanejo
3. Universidad Auónoma de Guerrero

Recibido: 30 de agosto de 2016
Aceptado: 31 de octubre de 2016

Resumen.
Entender procesos biológicos (como el crecimiento) a través de medios matemáticos (tales como la modelación) es una tarea recurrente en los sistemas educativos. Sin embargo, en muchos casos, se hace bajo situaciones imaginarias o abstractas dejando de lado lo concreto, el contexto social o específico del futuro profesionista, y sin ir más allá de un simple análisis superficial de la situación. Separando, por un lado, el conocimiento matemático del científico; mientras que, por otro, no analizando la situación a detalle.

Por tal motivo, proponemos una alternativa para el estudio del modelo de crecimiento Gompertz, con ayuda de una situación de aprendizaje (apoyada con tecnología, GeoGebra) que traslada al estudiante a un medio de análisis gráfico, analítico e interpretativo. Esto, con la firme intención de aportar elementos didácticos y/o servir de apoyo para el desarrollo de prácticas en el estudio de modelos matemáticos utilizados en el Área de Ciencias Biológico Agropecuarias y Pesqueras (ACBAP) o afines, presentes en las instituciones educativas.

Bajo la estructura del diseño de aprendizaje, establecemos, además, una metodología para la modelación matemática en la que consideramos al contexto social como fuente de conocimiento.

Palabras clave: Modelo, crecimiento, estudio, tecnología

Abstract
Understanding biological processes (such as growth) through mathematical means (such as modeling) is a recurrent task in education systems. However, in many cases, it is done under imaginary or abstract situations leaving aside the concrete, social or specific context of the future professional, and without going beyond a simple superficial analysis of the situation. Separating, on the one hand, the mathematical knowledge of the scientist; While, on the other, not analyzing the situation in detail.

For this reason, we propose an alternative for the study of the Gompertz growth model, with the help of a learning situation (supported by technology, GeoGebra) that moves the student to a medium of analytical, analytical and interpretive analysis. This, with the firm intention of providing didactic elements and / or supporting the development of practices in the study of mathematical models used in the Area of Agricultural and Fishery Biological Sciences (ACBAP) or related, present in educational institutions. Under the structure of learning design, we also establish a methodology for mathematical modeling in

which we consider the social context as a source of knowledge.

Keywords: model, growth, study, technology

Introducción.

Los modelos de crecimiento poblacional se encuentran agrupados por dos particularidades, diametralmente opuestas, por un lado, se localizan los modelos que representan un medio ilimitado, cuyo único integrante es el modelo exponencial. Mientras que, por otro lado, están los modelos capaces de representar un espacio limitado, entre los que destacan el modelo logístico y el modelo Gompertz.

Gráficamente, todo crecimiento poblacional se describe, en primera instancia, bajo una función exponencial hasta llegar a un punto donde factores internos y externos afectan el crecimiento provocando, en el gráfico, un punto de inflexión y posteriormente haciendo el crecimiento más lento hasta llegar a una estabilidad. Es decir, el crecimiento poblacional queda representado por la combinación de un gráfico de una curva exponencial (modelo exponencial) y una curva sigmoidea o en forma de S (modelos logístico y Gompertz, respectivamente).

La aparición de éstos; logístico y Gompertz, fue uno después del otro. Primeramente, floreció el modelo logístico desarrollado por Thomas Robert Malthus quien en 1798 escribió un ensayo sobre el principio de la población. En dicho ensayo, Malthus lograría establecer que la población humana se encuentra condenada a la extinción provocada por la limitación de recursos.

Más tarde; Benjamín Gompertz, a quien la historia lo ubica como un célebre matemático autodidacta, establece una mejora al modelo demográfico de Thomas Malthus mismo que ha sido utilizado para describir las dinámicas poblacionales o demográficas. Actualmente, la ecuación conocida como curva de Gompertz es usada en muchas áreas tales como la biología y la medicina para modelar fenómenos o situaciones donde el crecimiento es lento al principio y al final del período.

Con base en lo anterior, puede afirmarse que este tipo de modelos pueden ser utilizados perfectamente para estudiar:

- El crecimiento poblacional en un ambiente con recursos limitado.
- El crecimiento de la talla o peso de un organismo.
- El número de bacterias en una caja de Petri.
- La población de animales en una isla.
- Tiempo de respuesta a medicamentos en pacientes.
- Ventas de un producto donde el total de venta tiene límite.

Sin embargo; atender contenidos biológicos, tales como el crecimiento, a través de medios matemáticos, como la modelación, es una tarea recurrente en los espacios de estudio en el ACBAP. Con la firme intención de aportar elementos didácticos y/o servir de apoyo para el diseño de prácticas en el estudio de modelos matemáticos utilizados en dicha área u otras, se pretende, a través de este trabajo, proponer una alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del modelo Gompertz, con ayuda de una situación de aprendizaje (apoyados con tecnología, GeoGebra) que traslada al estudiante a un medio de análisis gráfico e interpretativo aplicados a un contexto social y/o profesional. Cabe hacer mención, que el diseño se presenta como medio de enseñanza, como herramienta en la enseñanza, como medio que remodela el contenido y/o como medio de intercambio académico.

Con lo anterior, se presenta una situación de aprendizaje que sirve de ayuda en el estudio, analítico y gráfico, del modelo de crecimiento Gompertz con el uso de una metodología que involucra el empleo de la tecnología y que muestra una nueva forma de modelar. Para ello, hemos dividido el trabajo de la forma siguiente:

En primera instancia, se expone al modelo Gompertz como concepto y se desarrolla un análisis gráfico de los parámetros que intervienen en él. Posteriormente, se fundamenta el papel que juega el contexto social para la creación de situaciones de aprendizaje y la forma en que éstas, aunado al empleo de la tecnología, dan origen a una nueva forma de modelar que promueve la interacción entre los cuatros marcos representacionales (verbal, numérico/tabular, gráfico y algebraico). Estableciendo así a la modelación como vínculo para acortar la separación existente entre los contenidos aprendidos en el aula escolar y su aplicación en la práctica profesional. Finalmente, se muestra una situación de aprendizaje que se considera idónea para la enseñanza del modelo Gompertz. Dicha situación se muestra a la par de un análisis hecho en la aplicación de la misma a un grupo de tercer semestre de la Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera del ACBAP de la Universidad Autónoma de Nayarit, reconociendo el proceso de resignificación de conceptos que siguen los estudiantes frente a situaciones que requieran el análisis de contenidos matemáticos y científicos con la traslación de las mismas a un contexto social específico.

Desarrollo.

El modelo Gompertz puede definirse como un modelo que aporta información importante en el estudio de situaciones o fenómenos de crecimiento poblacional o de cualquier índole bajo un espacio limitado de recursos y donde el crecimiento máximo o puede ser muy pequeño o muy grande. Por su parte, al ser un modelo de crecimiento que representa un medio limitado como el logístico, se describe por medio de un gráfico de tipo sigmoidea o lo que es lo mismo en forma de "S". En su comportamiento gráfico identificamos tres fases: el crecimiento exponencial (primera), la interacción con el medio (segunda) y el equilibrio (tercera), *véase Fig. 1*.

<u>Fase de crecimiento exponencial.</u> Se ha denominado así debido a que, de manera gráfica, en su etapa inicial, el modelo Gompertz se comporta como un modelo exponencial. En este momento, el crecimiento de la población o rasgo no se ve afectado por ningún factor, de los que rodea el medio, que impida su crecimiento y, por tal, se genera un crecimiento exponencial de forma pura.

<u>Fase de interacción con el medio.</u> En esta etapa, el crecimiento poblacional o rasgo se ve afectado por los factores, que intervienen en el medio, impidiendo así su crecimiento exponencial. Ello hace, que el crecimiento sufra una desaceleración haciéndolo pausado, lento.

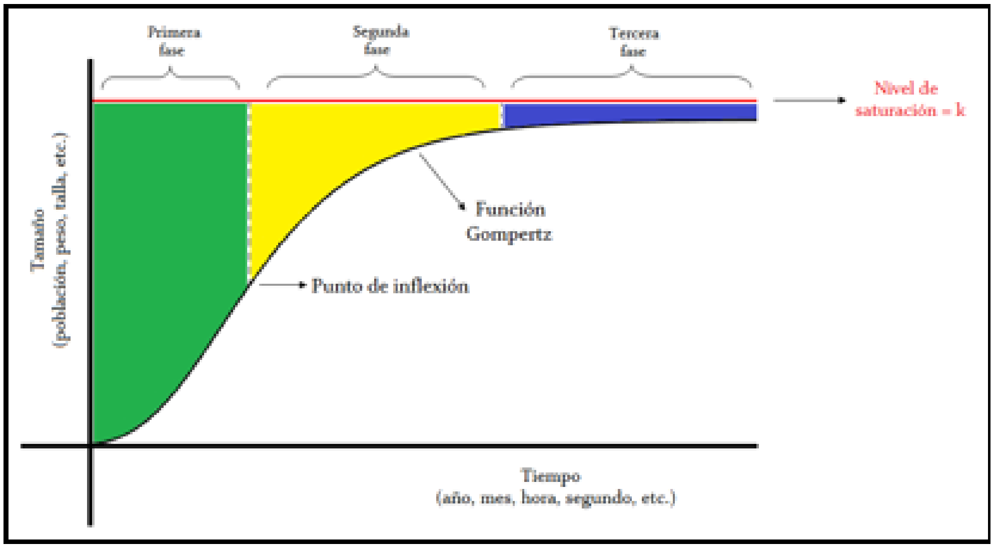


Fig. 1. Fases del modelo Gompertz.

Fase de equilibrio. Para esta última etapa, la interacción que mantiene el crecimiento de la población con el medio, que nace desde la etapa dos, continúa su efecto cada vez con mayor fuerza impidiendo se desarrolle el crecimiento. En este momento, el crecimiento experimenta una desaceleración cada vez mayor hasta alcanzar un equilibrio en el mismo.

Descripción de los parámetros.

A pesar de existir un sin número de ecuaciones que reflejan un modelo Gompertz. Se ha tomado, por los parámetros que utiliza, el siguiente:

$$P(t) = k \cdot e^{-\ln\left(\frac{k}{P_o}\right) \cdot e^{-rt}}$$

Elementos *P(t)*, *t* y *e*.

El elemento *P(t)*, en el modelo Gompertz, indica el tamaño de la población existente de un determinado organismo o el crecimiento de un rasgo del mismo (peso, talla, etc.), en un tiempo establecido denominado "*t*" y expresado en años, mes, días, horas, etc. Por su parte, el elemento "*e*" es el símbolo que representa la base del logaritmo natural, es decir, cuyo valor aproximado es de 2.7183. Cabe resaltar que *P(t)* juega el papel de variable dependiente, *t* de variable independiente y "*e*" de constante.

Parámetro *k*.

Al representar el modelo Gompertz un medio limitado, el parámetro *k*, teóricamente, es el valor que indica la capacidad de carga o límite con que cuenta un sistema donde se esté desarrollando un crecimiento poblacional o bien alguna cualidad (talla, peso, etc.) de un organismo.

Sin embargo, en la práctica (mundo real), no se trata de un valor que pueda obtenerse por medio de la asignación propia, debido a que toda población mantiene cambios permanentes, ganancias y pérdidas, en su crecimiento generando así fluctuaciones alrededor de un valor promedio (Odum y Sarmiento, 1998, p. 169). El valor de éste promedio es lo que representaría, en una situación práctica, el valor del parámetro "*k*". Por lo tanto, el parámetro "*k*" no es más que la población máxima que podría existir en un sistema o bien la medida máxima que alcanzaría algún rasgo de un organismo.

De esta forma si:

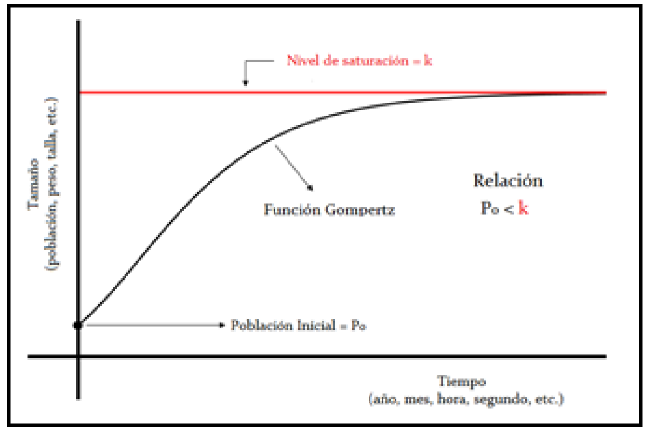
$$\lim_{t \to \infty} P(t) = k$$

Parámetro P_0.

Para todo crecimiento, ya sea poblacional o correspondiente a alguna cualidad (peso, talla, etc.) de un organismo, es indispensable el reconocimiento de un valor inicial pues de lo contrario no habría crecimiento alguno. En este sentido, y para el modelo Gompertz, el parámetro P_0 es la población, peso o talla inicial existente en el sistema u organismo. Por lo tanto, el parámetro P_0 (población, peso o talla inicial) deberá ser siempre mayor que cero pero menor que el límite de la capacidad de carga (parámetro *k*). Para comprender mejor, analizaremos, por medio de cuatro casos, las relaciones existentes entre los parámetros P_0 y *k*.

Relación entre los parámetros *k* y P_0.

Caso I. Si $P_0 < k$ la población crece, hasta verse afectada por los diversos factores del medio ambiente, y alcanza una planicie, el nivel de saturación o capacidad de carga, *k*. Gráficamente, lo que ocurre, es la curva Gompertz. *Véase Fig. 2.*



Fig, 2. Relación $P_o < k$.

Caso II. En dado caso de que se considere una población inicial mayor que el límite de carga del medio ($P_0 > k$), el gráfico decrece hasta alcanzar una asíntota que ha de ser el nivel de saturación, k. La gráfica que se desarrolla no pertenece a la familia del modelo Gompertz, *véase Fig. 3.*

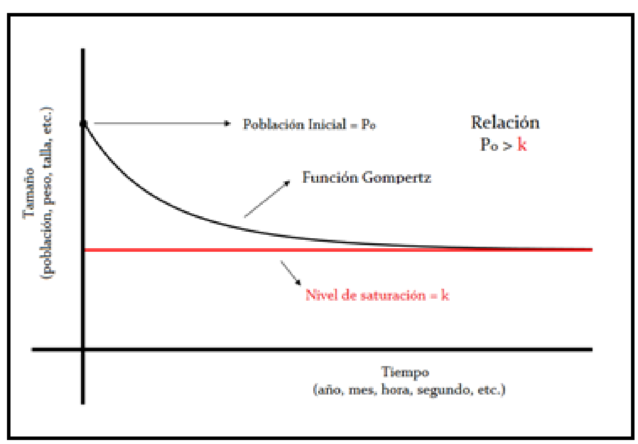


Fig. 3. Relación $P_0 > k$.

Caso III. Si se considera una población inicial igual al límite de carga del sistema, P_0 = k, se describe una gráfica del tipo constante donde P(t) = P_0 o, en su defecto, P(t) = k. Por tal motivo, la gráfica que se forma no pertenece a la familia del modelo Gompertz, *véase Fig. 4*.

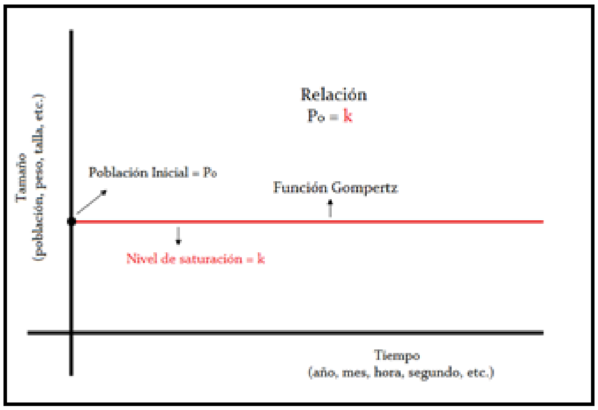


Fig. 4. Relación P_0 = k.

Caso IV. La P_0 = 0. En dado caso de que la población inicial fuera igual a cero, es decir que no se tuviera una población inicial, entonces sería imposible desarrollar una gráfica, *véase Fig. 5*.

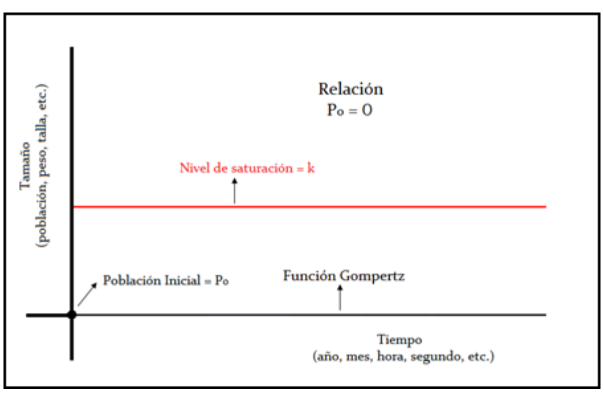


Fig. 5. Relación P_0 = 0.

Parámetro r **.**

El modelo Gompertz, como ya se mencionó, refleja un crecimiento limitado a causa de la interacción que hay entre las ganancias y las pérdidas de la población o del rasgo del organismo. A esta interacción se le denomina tasa instantánea de crecimiento poblacional, se denota por la letra "*r*" y no es un valor constante. Por lo que, a lo largo de todo el crecimiento se describe de distinta forma, *véase Fig. 6*.

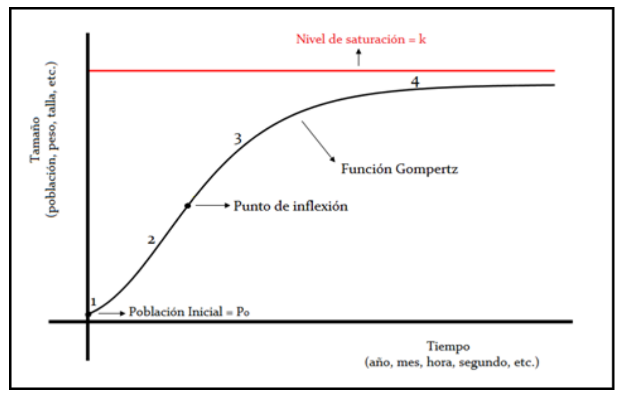


Fig. 6. Fases del parámetro "r".

Al inicio del crecimiento poblacional o crecimiento de algún rasgo del organismo, la tasa instantánea de crecimiento poblacional se encuentra con un valor igual a cero (1), es decir, aún no intervienen ni las ganancias ni las pérdidas del fenómeno. A partir de ese momento y hasta el punto de inflexión, el crecimiento se desarrolla de forma pura (2), al igual que con el crecimiento exponencial, por lo que sólo existen ganancias en el fenómeno de crecimiento y no hay pérdidas que afecten al mismo. Por su parte, el punto de inflexión del fenómeno marca el inicio de la desaceleración del crecimiento, este efecto se debe a que en el desarrollo del crecimiento empiezan a afectar las pérdidas y por tal inicia el forcejeo con las ganancias, así continúa durante un buen período hasta que, finalmente (4), alcanza su equilibrio en la cantidad de ganancias y pérdidas, es decir, se genera una estabilidad que acompaña con fluctuaciones a un nivel de saturación límite (Wallace et al, 1992, p.133).

Valores de r.

Los valores de *"r"* pueden ser variados sin embargo unos pueden hacer que se desarrolle, gráficamente, la función Gompertz y otros no lo permiten. Si los valores de *"r"* son mayores a cero ( ) se produce el gráfico que representa al modelo Gompertz, en la *Fig. 7*, conforme los valores de *"r"* van en aumento, la curva de Gompertz se va a acercando cada vez más al eje de las *"y"*: Por su parte, si los valores de *"r"* fuesen negativos o menores a cero ( ) no se produce una curva de crecimiento con significancia, *véase Fig. 8*, todo ello debido a que la curva se prolonga para valores negativos en el tiempo y eso no es posible en la vida real. Por lo tanto, la ecuación que resulta para , no corresponde a una ecuación de Gompertz útil para fines prácticos.

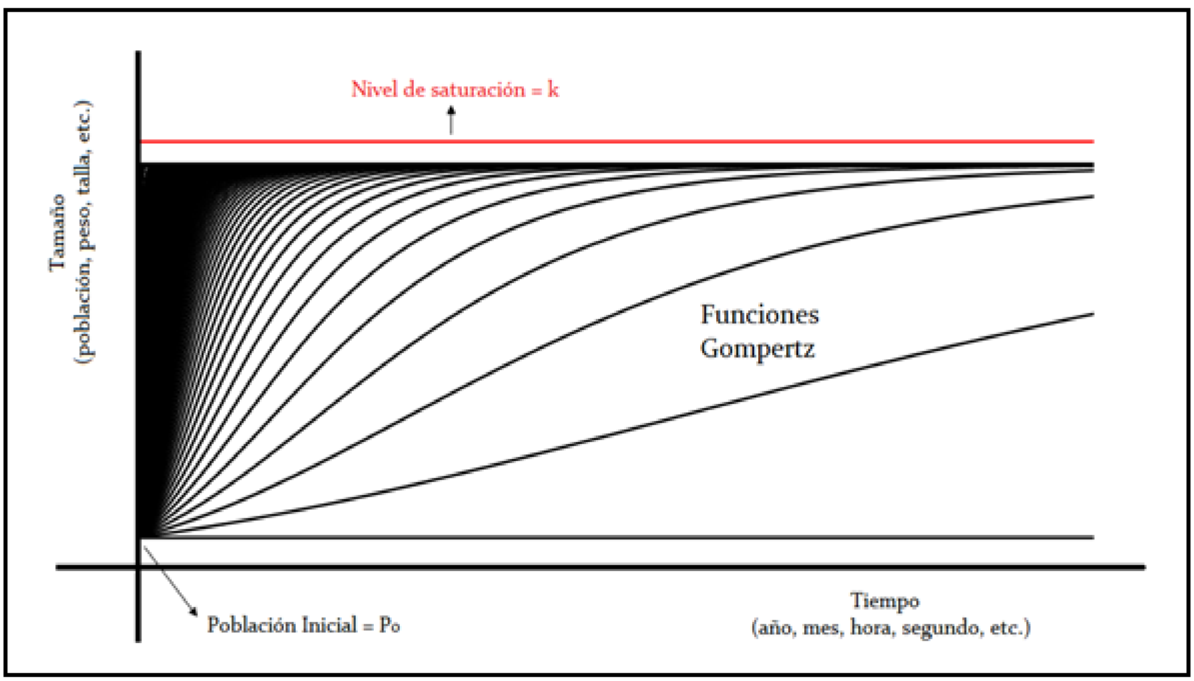


Fig. 7. Curva con valor *"r"* positivo.

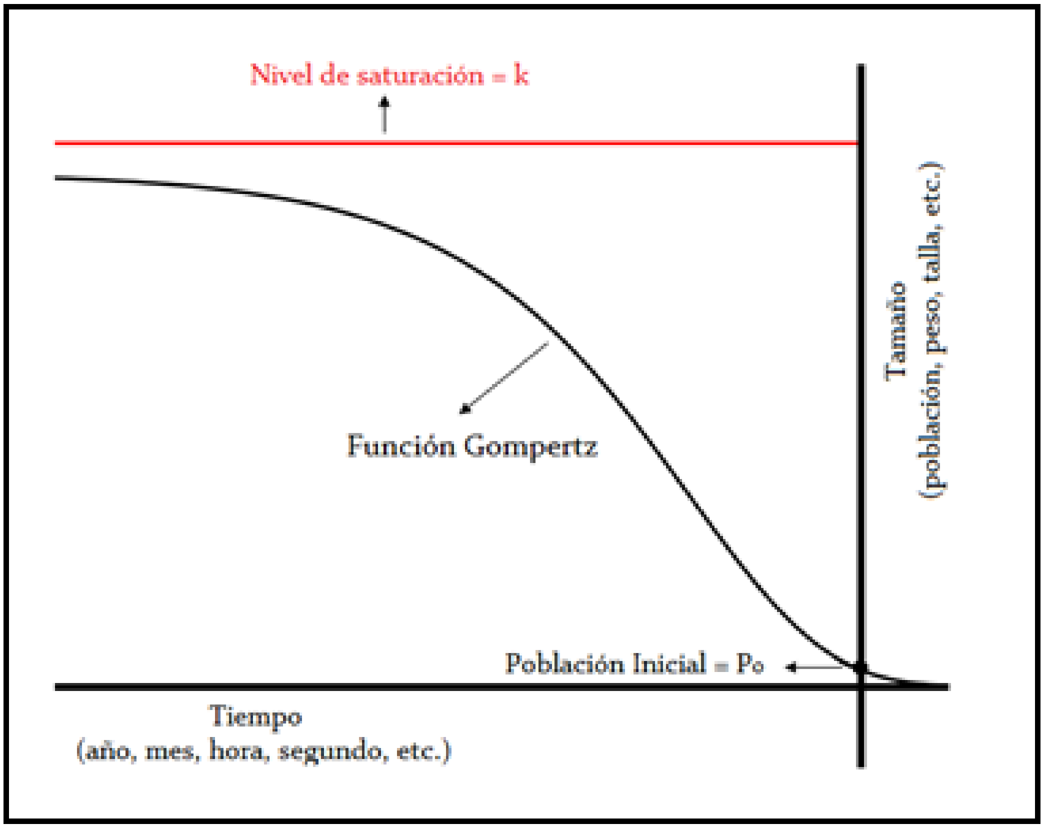


Fig. 8. Curva con valor *"r"* negativo.

Una problemática en la obtención de un modelo matemático.

La modelación matemática en el sistema escolar se ha acrecentado en los últimos años convirtiéndose en una herramienta útil para la resignificación de contenidos matemáticos (Suárez, 2006). Sin embargo, utilizar la modelación matemática como proceso o herramienta no sólo debe servir para reconstruir contenidos matemáticos sino también debe cumplir la función de reestructurar contenidos científicos ubicados en un contexto social y/o profesional futuro del estudiante y así ser el puente entre la escuela y la práctica profesional.

Trabajar la modelación matemática, en situaciones de crecimiento, se es una tarea recurrente en el ACBAP o afines, de algunas instituciones. Sin embargo, muchas de las ocasiones, se hace bajo esquemas o datos imaginarios, simulación de situaciones, donde sólo se busca encontrar un modelo matemático que simbolice la situación y que permita hacer estimaciones futuras. Atendiendo, así, solamente la importancia del conocimiento matemático (obtención del modelo) dejando de lado el conocimiento científico que presentan los procesos biológicos.

El proceso, *ver Fig. 9*, que utilizan algunos profesionales de dichas áreas se compone de cuatro elementos: datos, interpretación, ajuste y predicción

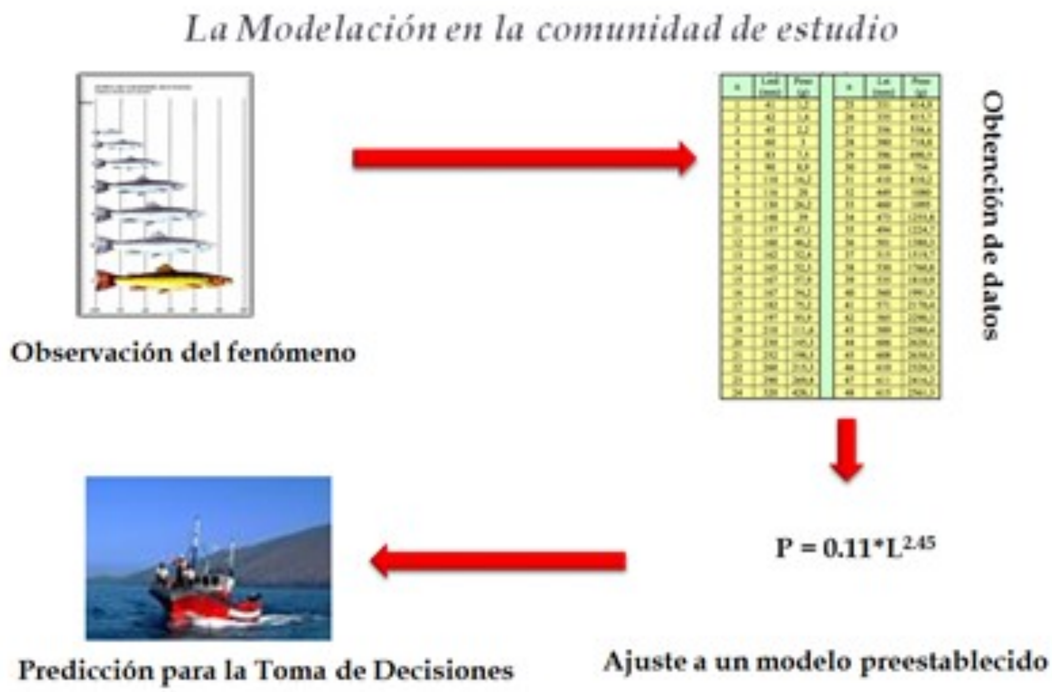


Fig. 9. Proceso de modelación matemática en el ACBAP.

Datos. Consiste en tomar nota sobre un conjunto de datos que representan una situación problemática. Dichos datos, en su mayoría, son dictados por el profesor, extraídos de libro, inventados; o en el mejor de los casos, obtenidos a través de una práctica de laboratorio.

Interpretación. En este paso, se debe identificar las variables que involucran la situación y cómo éstas se relacionan. Posterior a ello, distribuir los datos gráficamente en un plano cartesiano e interpretar qué tipo de comportamiento presenta la situación.

Ajuste. Consiste en ajustar los datos a modelos ya establecidos (lineal, cuadrático, cúbico, polinómico, exponencial, logístico, Gompertz, entre otros). Así pues, encontrar el modelo que mejor ajuste los datos sin tomar en cuenta lo que se está analizando en la situación.

Predicción. Paso final del proceso en el cual ya una vez establecido el modelo que representa la situación. Se busca estimar resultados futuros o tomar acciones para la mejora.

Este proceso, utilizado en el ACBAP limita al estudiante a simplemente ajustar un conjunto de datos a un modelo pre-establecido buscando, de esta forma, una representación algebraica que mejor describa la situación sin analizar la interrelación que pueda tener con ella. Tal y como lo señalan Rodríguez y Ulloa (2013) no basta con encontrar un modelo, en su representación algebraica, que mejor ajuste a un conjunto de datos sino identificar qué tanto se relaciona y sí tiene coherencia con el conocimiento científico (proceso biológico) a estudiar en una situación particular. Es decir, el modelo en su representación algebraica deberá ser el punto de partida para analizar una situación problemática a través de sus distintos marcos representacionales restantes (discurso verbal, gráfico, numérico/tabular) y así decidir si es adecuado o no.

Con lo anterior, consideramos que el proceso de modelación matemática, a diferencia del utilizado en el ACBAP, debe contemplar a un modelo matemático como la representación de una situación a través de distintos marcos de representación: verbal, gráfico, numérico/tabular y algebraica, *véase Fig. 10.*

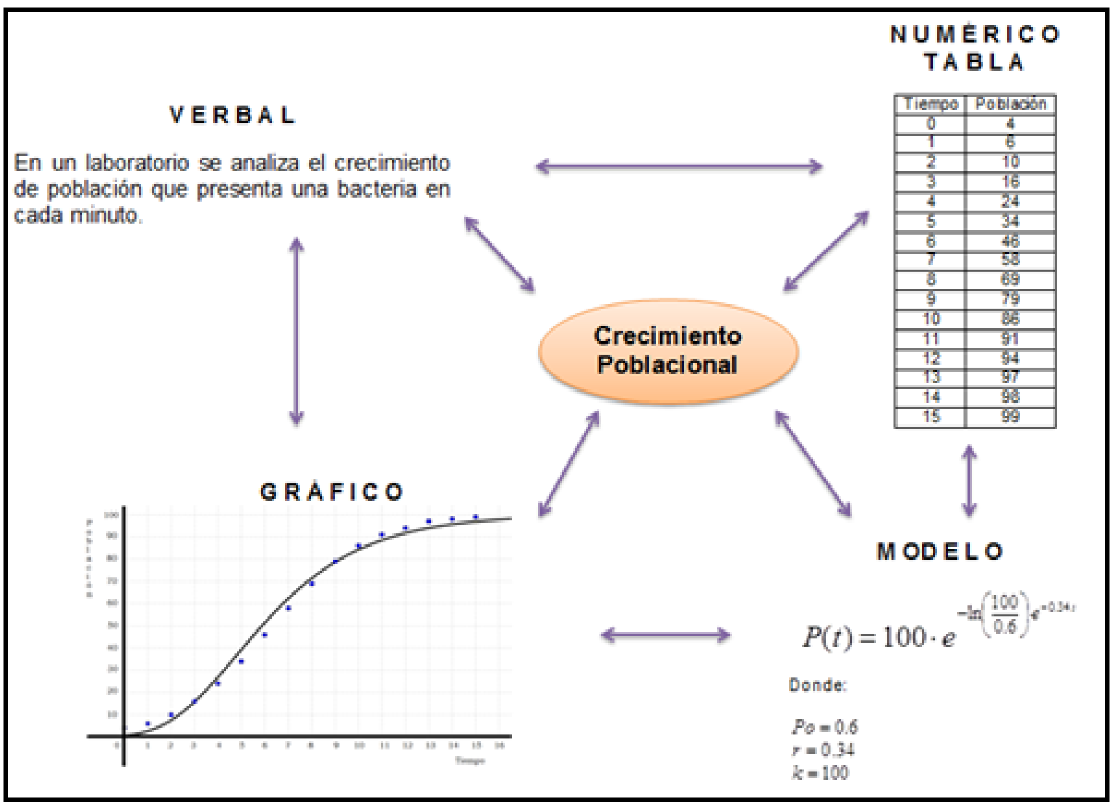


Fig. 10. Marcos representacionales de los modelos.

Modelo verbal. Es la representación escrita de la situación problemática a analizar, se describe el fenómeno ubicándolo en un contexto específico y con valores de utilidad.

Modelo numérico/tabular. Se le denomina así a la representación numérica que describe la situación problemática, datos que pueden ser extraídos del mismo modelo verbal o pueden ya estar presentados como un agregado. Normalmente, este modelo se establece en una tabla donde intervienen dos variables que están correlacionadas.

Modelo gráfico. Es la representación gráfica de la situación problemática en un plano de dos o tres dimensiones, según sea el caso. Existen dos formas de representar el modelo gráfico; graficando los datos del modelo numérico/ tabular, o bien, graficando el modelo algebraico que representa la situación. Pueden ser llevados a cabo de manera aislada o simultánea.

Modelo algebraico. Es la representación algebraica de la situación problemática. En este modelo, hablamos de la función matemática donde intervienen las variables (independiente y dependiente) del modelo numérico/tabular y una o algunas constantes.

Todos los modelos representacionales: verbal, numérico, gráfico y algebraico, están relacionados entre sí. Si uno tiene alguna variación, los otros también la tendrán. Sin embargo, para tomar una decisión correcta sobre el modelo que mejor ajuste y represente a una situación problemática es importante conocer el fenómeno que se está analizando. Es decir, si el modelo seleccionado no tiene coherencia con lo que se analiza entonces deberá ser desechado y buscar otro.

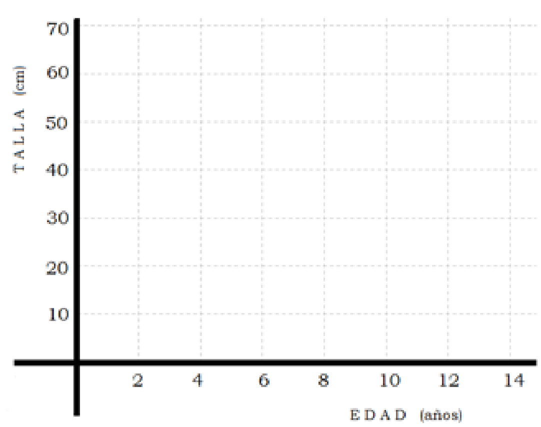
Desarrollo.

Situación problemática.

Los datos que se presentan en la tabla siguiente representan la talla media (cm) por edad (años) obtenida de lecturas directas de edad realizadas con ejemplares del stock de rape (*lophius budegassa*).

Edad (años)	Talla (cm)
1	9.2
2	16.5
3	22.9
4	28.8
5	34.7
6	38.6
7	44.4
8	49
9	52.3
10	56
11	60.8
12	63.4

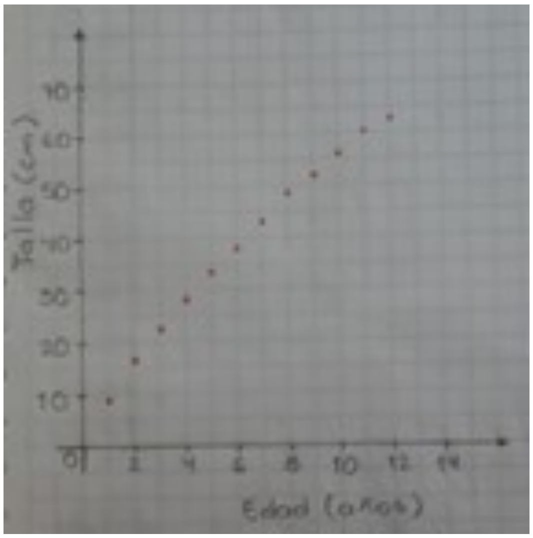
¿Cómo queda la distribución gráfica de los datos?



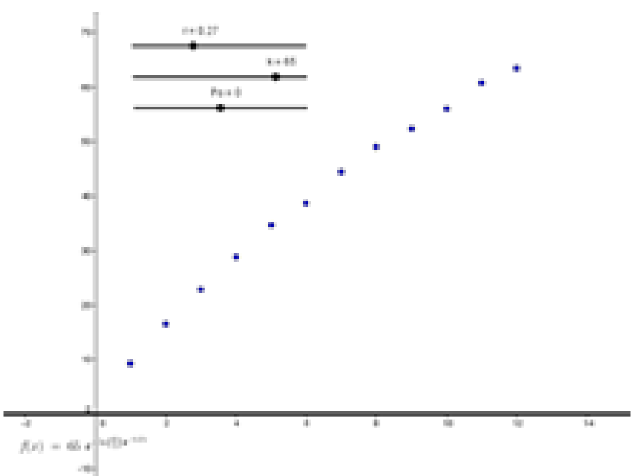
Desarrollo.

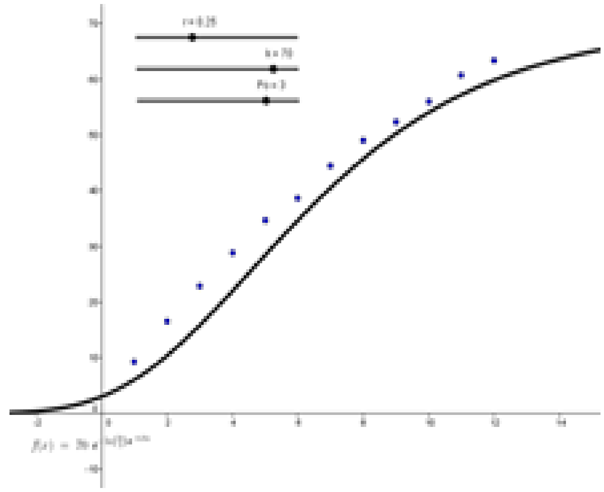
Descripción de proceso y desarrollo

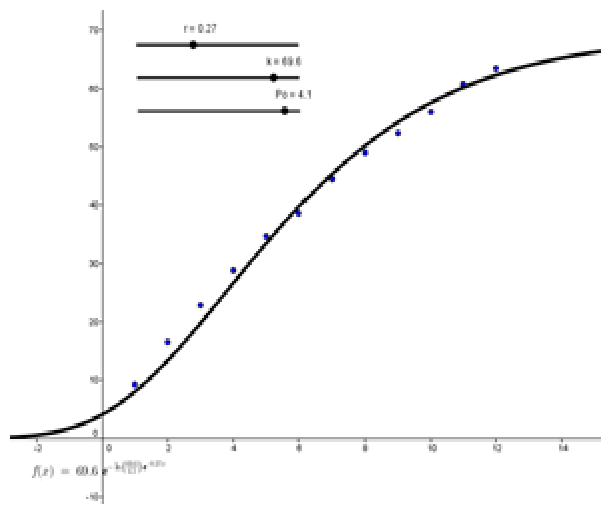
¿Cómo queda la distribución gráfica de los datos?



Utilizando GeoGebra, captura los datos de la situación problemática, introduce los parámetros y grafica tu modelo de estimación.







Po = 4.1

K = 69.6

r = 0.27

Lo que produjo el siguiente modelo

$$f(t) = 69.6e^{-\ln\left(\frac{69.6}{4.1}\right)e^{-0.27t}}$$

Sugerencias para el trabajo futuro.

Con este trabajo se espera contribuir a entender los momentos de construcción que vive un estudiante al analizar y comprender situaciones de crecimiento a través de la modelación matemática en sus distintos marcos representacionales (verbal, numérico/ tabular, gráfico y algebraico). Sabiendo diferenciar y relacionar el conocimiento matemático con el científico y viceversa, haciendo uso de la tecnología.

Esperamos que este trabajo sea el origen de un cambio en la metodología empleada por el ACBAP, que ya no consista en sólo buscar un modelo algebraico que mejor represente una situación sino que ahora se tome en cuenta lo que se analiza, el contexto, el conocimiento científico y el matemático aplicado, de manera aislada y conjunta para una mejor resignificación de conceptos por parte del estudiante.

Sin embargo, para encontrar el modelo algebraico que mejor se ajuste a los datos de la situación requiere de mucho tiempo y paciencia si se hace a lápiz y papel. Por lo que, para erradicar esta circunstancia creemos conveniente la utilización de la tecnología para tal aspecto. Se plantea, utilizar la tecnología como un medio y como una herramienta que contribuya en el proceso de modelación matemática. La tecnología como medio; involucra utilizarla para analizar las características y función principal de los parámetros de un modelo bajo ciertas circunstancias. Mientras que, la tecnología como herramienta sirve de enlace entre una situación problemática y el modelo que mejor la represente, o viceversa.

Bibliografía consultada y recomendada.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*. 42, pp. 353-369.

Odum, E. y Sarmiento, F. (1998). Ecología. El puente entre ciencia y sociedad. Pág. 169. México. Editorial Mc Graw – Hill Interamericana.

Rivera, M. (2008). La relación entre comunidades, las prácticas sociales y las herramientas; la unidad básica. *Resúmenes de la Vigésimo segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Rodríguez, J. (2008). Una propuesta didáctica para el estudio de un modelo Logístico. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Nayarit. Tepic. Nay.

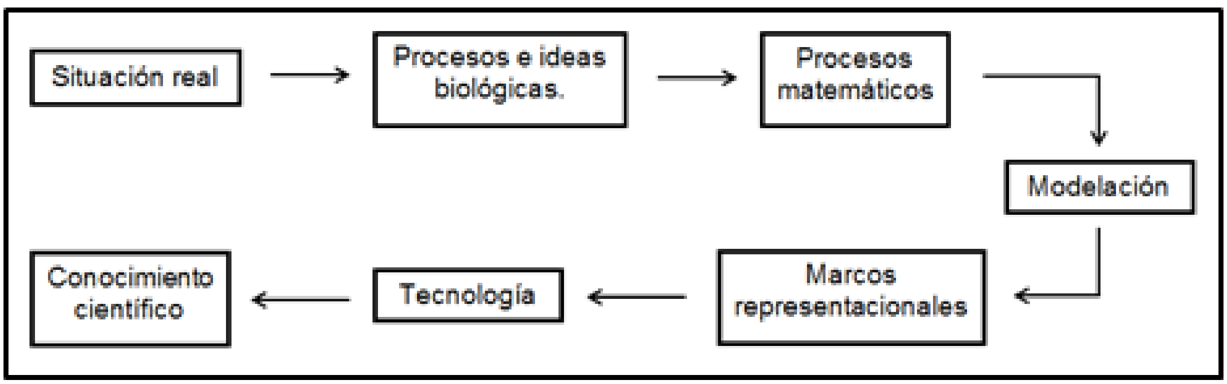
Suárez, L. (2006). El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico. Memoria predoctoral no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2007). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2010). El modelo Logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *Revista Electrónica de Veterinaria*, Vol. 11, Núm. 03.

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2013). La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. *Revista Electrónica de Veterinaria*, Vol. 14, Núm. 02.

Wallace, R., King, J. & Sanders, G. (1992). Conducta y ecología. La ciencia de la vida. Pág. 133. México. Editorial Trillas.



Proceso modelación matemática con tecnología.